6174

MÉMOIRES

DE LA SOCIÉTÉ DES

SCIENCES PHYSIQUES ET NATURELLES

DE BORDEAUX

Ser 3

3

MÉMOIRES

DE LA SOCIÉTÉ

DES SCIENCES

PHYSIQUES ET NATURELLES

DE BORDEAUX

3e Série

TOME III

PARIS

GAUTHIER-VILLARS

IMPRIMEUR-LIBRAIRE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU
DES LONGITUDES, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

A BORDEAUX

CHEZ FERET, LIBRAIRE

15. cours de l'Intendance, 15

1887

LISTE

DES

PRÉSIDENTS ET VICE-PRÉSIDENTS DE LA SOCIÉTÉ

de 1853 à 1887

ANNÉE	PRÉSIDENT	VICE-PRÉSIDENT
1853-1854	BAZIN.	DELBOS.
1854-1855	BAZIN.	»
1855-1856	BAZIN.	»
1856-1857	ORÉ.	»
1857-1858	BAUDRIMONT.	»
1858-1859	BAZIN.	»
1859-1860	BAUDRIMONT.	»
1860-1861	ABRIA	»
1861-1862	LESPIAULT.	ORÉ.
1862-1863	BAUDRIMONT.	ROYER.
1863-1864	ORÉ.	AZAM.
1864-1865	AZAM.	ROYER.
1865-1866	ROYER.	H. GINTRAC.
1866-1867	H. GINTRAC.	O. DE LACOLONGE.
1867-1868	O. DE LACOLONGE.	GLOTIN.
1868-1869	GLOTIN.	JEANNEL.
1869-1870	LINDER.	DELFORTERIE.
1870-1871	LINDER.	DELFORTERIE.
1871-1872	DELFORTERIE.	ABRIA.
1872-1873	ABRIA.	RATHEAU.
1873-1874	BAUDRIMONT.	SERRÉ-GUINO.
1874-1875	SERRÉ-GUINO.	BAYSSELLANCE.
1875-1876	BAYSSELLANCE.	LOQUIN.

ANNÉE	PRÉSIDENT	VICE-PRÉSIDENT
1876-1877	LOQUIN.	HAUTREUX.
1877-1878	HAUTREUX.	E. BOUTAN.
1878-1879	E. BOUTAN.	MICÉ.
1879-1880	DUPUY.	MILLARDET.
1880-1881	MILLARDET.	DE LAGRANDVAL.
1881-1882	DE LAGRANDVAL.	G. RAYET.
1882-1883	G. RAYET.	FOURNET.
1883-1884	G. RAYET.	FOURNET.
1884-1885	G. RAYET.	FOURNET (1).
1885-1886	G. RAYET.	BOUCHARD.
1886-1887	G. RAYET.	BOUCHARD.

(1) En novembre 1885, M. Fournet a été nommé Président honoraire.

LISTE DES MEMBRES DE LA SOCIÉTÉ

au 1er Décembre 1886.

Composition du Bureau pour l'année 1886-1887.

MM. FOURNET, ✿ A., *Président honoraire.*
RAYET, ✱, *Président.*
BOUCHARD, O. ✱, *Vice-Président.*
ABRIA, O. ✱, *Secrétaire général.*
JOANNIS, } *Secrétaires adjoints*
GARNAULT, }
BRUNEL, *Archiviste.*
FOUGEROUX, *Trésorier.*
GAYON, } *Membres du Conseil.*
MILLARDET,
DE LAGRANDVAL, ✱,
PÉREZ.
DUPUY,
AZAM, ✱,
MORISOT,
JOLYET,
LESPIAULT, ✱,
MERGET, ✱,
HAUTREUX, ✱,
BAYSSELLANCE, O. ✱,

Membres titulaires (¹).

MM. ABRIA, O. ✱, correspondant de l'Institut (Académie des Sciences), doyen honoraire de la Faculté des Sciences.
ALENGRY, maître répétiteur au Lycée.
AUGIS, ingénieur de la Compagnie du Midi.
AZAM, ✱, professeur à la Faculté de Médecine.
BADAL, ✱, professeur à la Faculté de Médecine.
BARCKHAUSEN, ✱, professeur à la Faculté de Droit.
BAULE, ✱, lieutenant de vaisseau, com. aux Messageries maritimes.
BAYSSELLANCE, O. ✱, ingénieur des Constructions navales en retraite.
BERGONIÉ, agrégé à la Faculté de Médecine.
BERLAND, chimiste en chef des Douanes.
BLAREZ, professeur à la Faculté de Médecine.
BOIGNIER, pharmacien,
BOUCHARD, O. ✱, professeur à la Faculté de Médecine.
BROCHON (E.-H.), avocat à la Cour d'Appel.

(¹) Les membres dont le nom est précédé d'un astérisque sont membres à vie.

MM. BRUNEL, professeur de calcul infinitésimal à la Faculté des Sciences.
CAGNIEUL, préparateur de Botanique à la Faculté des Sciences
CARLES, agrégé à la Faculté de Médecine.
CARMIGNAC-DESCOMBES, ingénieur.
CARON, professeur de Mathématiques au Lycée.
CASTET, chef d'institution.
CHADU, professeur de Mathématiques au Lycée.
CHASTELLIER, ingénieur des Ponts et Chaussées.
CHENEVIER, chimiste au Chemin de fer du Midi.
COLOT, licencié ès sciences, professeur de Mathématiques.
COUPERIE, secrétaire général de la Société d'Agriculture.
DALMEYDA, professeur au Lycée.
DELMAS, ✱, docteur en médecine, direct. de l'hydrothérapie des Hôpitaux.
DEVULFF, colonel du génie.
DOUBLET, aide-astronome.
DROGUET, ✱, directeur des postes, à Bordeaux.
DUBREUILH.
DUBOURG, chimiste à la Douane.
DUPUY, professeur de Mathématiques au Lycée.
DURÈGNE, sous-ingénieur au Télégraphe.
ELGOYHEN, élève à la Faculté des Sciences.
FALLOT, professeur à la Faculté des Sciences.
FIGUIER, ✱, professeur à la Faculté de Médecine.
FLAMME, aide-astronome.
FOUGEROUX, percepteur des Contributions directes.
*FOURNET, A., ancien fabricant de produits chimiques.
GADEN, négociant.
GARNAULT, préparateur de Zoologie à la Faculté des Sciences.
GAULNE (DE), propriétaire.
*GAYON, profr de Chimie à la Fac. des Sciences, chimiste en chef à la Douane
GOUJON, ✱, vice-président du Conseil de préfecture de la Gironde.
GUESTIER (Daniel), négociant.
GUILLAUD, professeur à la Faculté de Médecine.
GYOUX, docteur en médecine.
HAUTREUX, ✱, lieutenant de vaisseau, directeur des mouvements du port en retraite.
HUYARD, fabricant de produits chimiques.
JOANNIS, professeur à la Faculté des Sciences.
JOLYET, professeur à la Faculté de Médecine.
KOWALSKI, professeur de Mathématiques.
KÜNSTLER, professeur à la Faculté des Sciences.
LABAT, ✱, ingénieur de constructions maritimes.
LACROIX, professeur de Mathématiques au Lycée.
LAGACHE, ingénieur des Arts et Manufactures.
LAGRANDVAL (DE), ✱, professeur de Mathématiques spéciales au Lycée, maître de conférences à la Faculté des Sciences.
LANDE, ✱, agrégé à la Faculté de Médecine, médecin adjoint des hôpitaux.

MM. LARNAUDIE, pharmacien.
LAVAL, professeur de Physique et de Chimie aux Écoles communales.
LAVERGNE (comte DE), ✻, propriétaire.
*LESPIAULT, ✻, doyen de la Faculté des Sciences.
MERGET, ✻, professeur de physique à la Faculté de Médecine.
MICÉ, ✻, recteur de l'Académie de Clermont.
MILLARDET, professeur de Botanique à la Faculté des Sciences.
MOMONT, étudiant à la Faculté des Sciences.
MONDIET, professeur de Mathématiques au Lycée.
MORISOT, professeur à la Faculté des Sciences.
PÉREZ, professeur de Zoologie à la Faculté des Sciences.
PERRIN, ingénieur des Ponts et Chaussées.
PETIT, licencié ès Sciences naturelles.
PIÉCHAUD, agrégé à la Faculté Médecine.
PIONCHON, professeur à la Faculté des Sciences.
RAGAIN, licencié ès sciences, professeur de dessin graphique.
RAYET (G.), ✻, professeur d'Astronomie physique à la Faculté des Sciences, directeur de l'Observatoire de Bordeaux.
ROCH, chimiste.
RODIER, maître de Conférences à la Faculté des Sciences.
ROUX, préparateur à la Faculté des Sciences.
ROZIER, professeur de Sciences.
SAUVAGEAU, professeur au Lycée.
SCHUSTER, préparateur à la Station agronomique.
SELLERON, ✻, ingénieur des constructions navales.
SOULÉ, officier supérieur du génie en retraite.
SOUS, docteur en médecine, oculiste.
*TANNERY (P.), ingénieur des Manufactures de l'État, à Paris
THOUVENEL, professeur au Lycée.
TRENQUELÉON (DE BATZ DE), professeur de Mathématiques au Lycée.
VERGELY, professeur à la Faculté de Médecine.
VIAULT, professeur à la Faculté de Médecine.
VOLONTAT (DE), ingénieur des Ponts et Chaussées.

Membres honoraires.

MM. BATTAGLINI (G.), professeur à l'Université de Rome, rédacteur du *Giornale di Matematiche*.
BONCOMPAGNI (le prince D. Balthazar), à Rome.
DARBOUX (G.), ✻, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences de Paris.
DE TILLY, major d'Artillerie, directeur de l'arsenal d'Anvers.
FORTI (Angelo), ancien professeur de Mathématiques au Lycée Royal de Pise.
FRENET, ✻, professeur honoraire à la Faculté des Sciences de Lyon, à Périgueux.
KOWALSKI, directeur de l'Observatoire de l'Université impériale de Kazan (Russie).

MM. LINDER, O. ✱, inspecteur général des Mines, à Paris.
RUBINI (R.), professeur à l'Université Royale de Naples.
WEYR (Em.), professeur à l'Université Impériale de Vienne.

Membres correspondants.

MM. ANDREEFF, professeur à l'Université de Kharkof.
ARDISSONE, professeur de Botanique à l'École Royale d'Agriculture de Milan.
ARIÈS, capitaine du Génie.
BJERKNES, professeur à l'Université de Christiania.
CURTZE (Max.), professeur au Gymnase de Thorn.
DILLNER (G.), professeur à l'Université d'Upsal.
ÉLIE, professeur au collège d'Abbeville.
ERNST (A.), professeur d'Histoire naturelle à l'Université de Caracas.
GARBIGLIETTI, docteur en médecine, à Turin.
GAUTHIER-VILLARS, O. ✱, ancien élève de l'École Polytechnique, libraire éditeur, à Paris.
GOMES TEIXEIRA (F.), professeur à l'Université de Coimbre.
GRAINDORGE, professeur à l'École des Mines, à Liège.
GÜNTHER (Dr. Sig.) professeur au Gymnase d'Ansbach.
HAILLECOURT, inspecteur d'Académie en retraite, à Périgueux.
HAYDEN, géologue du Gouvernement des États-Unis.
IMCHENETSKY, membre de l'Académie Impériale de Saint-Pétersbourg.
LAISANT, ✱, ancien officier du Génie, député de la Loire-Inférieure.
MUELLER (baron Ferd. von), membre de la Société Royale de Londres. directeur du Jardin Botanique de Melbourne (Australie).
PEAUCELLIER, O. ✱, général du génie.
PICART, professeur de Botanique en retraite, à Marmande (Lot-et-Garonne).
PONSOT (Mme), propriétaire aux Annereaux, près Libourne.
ROIG Y TORRES (D. Rafael), naturaliste à Barcelone, directeur de la *Crónica Cientifica*.
ROUMEGUÈRE, naturaliste, à Toulouse, rédacteur de la *Revue Mycologique*
ROUX, ✱, docteur en Médecine, à Paris.
TRÉVISAN DE SAINT-LÉON (comte DE), à Milan.
WEYR (Éd.), professeur à l'Université de Prague.

EXTRAITS

DES

PROCÈS-VERBAUX DES SÉANCES DE LA SOCIÉTÉ

ANNÉE 1886-87.

Présidence de M. G. RAYET.

Séance du 18 novembre 1886. — M. LE PRÉSIDENT, après avoir ouvert la séance, s'exprime ainsi :

« L'année qui se termine a été impitoyable pour nous; successivement elle a frappé les plus anciens et les plus aimés d'entre nous : ALEXANDRE, LACOLONGE, ROYER, HOÜEL; enfin, il y a quelques jours à peine, P. BERT, notre collègue effectif de quelques mois, notre correspondant toujours dévoué, notre avocat infatigable auprès de l'Administration supérieure, payait de sa vie son dévouement à la prospérité d'une colonie naissante et à la régénération de la France.

» Paul Bert, d'abord étudiant en droit, puis docteur en médecine (1863), après son livre sur la *greffe animale,* ne tarda pas à abandonner la pratique médicale pour se donner tout entier, sous la direction de Gratiolet, puis de Claude Bernard, à des études plus physiologiques. C'est, si je ne me trompe, sous les yeux de notre plus éminent physiologiste, dans les laboratoires du Collège de France, qu'ont été préparés les matériaux de sa thèse de docteur ès-sciences, son *Histoire de la vitalité propre des tissus animaux* (1866). C'est alors qu'il eut la bonne fortune d'introduire dans la science cette proposition majeure de la conductibilité indifférente des nerfs.

» En 1865, Paul Bert avait obtenu le prix de physiologie expérimentale à l'Académie des sciences; son titre de docteur lui valut immédiatement la chaire de physiologie à la Faculté des sciences de Bordeaux, et il devenait notre collègue le 11 avril 1866.

» Les laboratoires de la Faculté des sciences étaient alors rudimentaires; ils suffirent cependant à Paul Bert pour effectuer de nombreux travaux dont plusieurs sont restés classiques.

» Ces travaux appelèrent bientôt Bert à Paris (1868) où il

venait remplacer Claude Bernard dans la chaire de la Sorbonne; c'est là qu'il poursuivit et acheva ses études sur la respiration de l'homme et des animaux.

» Ce qu'a fait Paul Bert permettait d'espérer beaucoup encore; il apportait dans toutes ses conceptions scientifiques une clarté, une précision qui le plaçait au premier rang parmi les maîtres de la physiologie contemporaine; il savait écrire et parler avec un charme qui doublait la valeur de ses travaux et le prix de ses découvertes. Peu d'hommes laisseront plus de souvenirs, et je suis certain que la *Société des Sciences physiques* s'associe aux regrets unanimes que cause sa mort prématurée. »

— M. le Président dépose sur le bureau le second cahier du tome II de la 3e série des *Mémoires de la Société;* ce cahier renferme, en particulier, les procès-verbaux de l'année 1885-86.

— M. le Président présente également à la Société le premier cahier du tome III de la 3e série de ses *Mémoires,* contenant une importante monographie de la fonction *gamma,* par M. Brunel.

— La Société procède au renouvellement du Bureau pour l'année 1886-1887; sont élus :

Président	M. G. RAYET.
Vice-Président	M. BOUCHARD.
Secrétaire général	M. ABRIA.
Secrétaires adjoints	MM. JOANNIS ET GARNAULT.
Archiviste	M. BRUNEL.
Trésorier	M. FOUGEROUX.

— MM. Lespiault, Merget, Hautreux, Bayssellance et Perez sont élus membres du Conseil d'administration qui se trouve ainsi constitué :

MM. GAYON.	MM. MORISOT.
MILLARDET.	JOLYET.
DE LAGRANDVAL.	LESPIAULT.
PEREZ.	MERGET.
DUPUY.	HAUTREUX.
AZAM.	BAYSSELLANCE.

— MM. GAYON et DUPETIT annoncent qu'ils ont employé avec succès les sels de Bismuth pour empêcher les fermentations secondaires dans les fermentations alcooliques de l'industrie. A la dose de $\frac{1}{10000}$ le sous-nitrate de bismuth, en solution acide, arrête tout développement des microbes sans nuire à celui de la levure. Grâce à ce sel, l'acidité des liquides fermentés reste normale, la richesse alcoolique augmente et l'alcool est de meilleure qualité. Voici, par

exemple, les nombres obtenus avec des fermentations de mélasses faites dans des cuves de plusieurs centaines d'hectolitres :

	I	II	III
	—	—	—
Augmentation d'acidité dans la cuve non traitée.	13,0	26,5	36,0
— — — traitée.....	2,5	6,7	4,5
Perte d'alcool due aux microbes, par rapport à l'alcool des cuves traitées....................	2,21 %	4,66 %	11,90 %

On voit tout l'intérêt qu'auraient les industriels à empêcher, par des antiseptiques convenables, le développement des infiniment petits.

Séance du 2 décembre 1886. — MM. Gayon et Dubourg rappellent que les levures alcooliques (saccharomyces) sont sans action sur les solutions de dextrine et sur l'empois d'amidon, et ne peuvent, par suite, les faire fermenter; mais ils sont parvenus à trouver dans une espèce particulière de Mucor un nouveau ferment qui possède la double propriété de fixer l'eau sur la dextrine et même sur l'amidon, et de faire fermenter les produits de cette saccharification. Ce Mucor, comme le *Mucor circinelloïdes,* n'intervertit pas le sucre de canne et ne le transforme pas en alcool.

Les levures non inversives ne font fermenter ni la dextrine ni l'amidon et diffèrent, à ce point de vue, du Mucor précédent.

Séance du 16 décembre 1886. — M. de Gaulne présente à la Société un appareil nouveau qu'il désigne sous le nom de *chromographe.* Cet appareil permet de mesurer la différence de couleur de deux vins.

M. de Gaulne expose ensuite diverses expériences qu'il a faites pour établir l'influence de l'acide carbonique dans les vins. Suivant lui, cet acide facilite la clarification des vins et maintient leur limpidité.

M. de Gaulne prie, en outre, la Société de nommer une Commission chargée de vérifier la graduation de son instrument. MM. Coupérie, Gayon et Morisot sont nommés membres de cette commission.

Séance du 6 janvier 1887. — MM. Pionchon et Sauvageau sont nommés membres titulaires.

— M. Rayet présente à la Société le tableau suivant des obser-

vations pluviométriques faites à l'Observatoire de Floirac, pendant les quatre derniers mois des années 1880 à 1886 :

ANNÉES.	Septembre.	Octobre.	Novembre.	Décembre.	TOTAUX des quatre mois.
	mm	mm	mm	mm	mm
1880	108,0	97,9	81,7	65,4	253,0
1881	37,7	84,6	29,5	87,9	239,7
1882	146,6	162,4	122,7	127,3	559,0
1883	68,0	78,1	86,6	51,5	284,2
1884	63,1	34,0	14,6	63,8	175,5
1885	76,3	119,0	76,5	30,6	302,4
1886	101,5	205,4	72,1	128,0	506,0
MOYENNE :	85,9	111,6	69,1	79,2	345,7

Les quatre mois qui ont terminé l'année 1886 nous laissent le souvenir de mois extrêmement pluvieux; cependant les chutes d'eau ont été plus abondantes encore en 1882. Tandis qu'en 1882 le total de la pluie de septembre, octobre, novembre et décembre s'élevait à $559^{mm},0$, le même total n'est plus que de $506^{mm},0$ en 1886 : ce total est, d'ailleurs, supérieur de $160^{mm},3$ à la moyenne des sept dernières années, y compris 1882 et 1886.

Comparée à 1882, la fin de 1886 se distingue par la continuité des phénomènes pluvieux et surtout par la faiblesse des *minima* barométriques et l'intensité des bourrasques.

— M. Blarez communique à la Société des recherches sur le *Dosage acidimétrique de l'acide sulfureux et des sulfites.* L'acide sulfureux est un acide bibasique, une fois acide fort et une fois acide moyennement fort. Lorsqu'on sature cet acide, en solution diluée, par les alcalis ou par les bases alcalino-terreuses en présence des principaux réactifs colorés alcalimétriques, on observe que ce corps se comporte comme un acide *monobasique* si on fait usage de *méthylorange,* de *cochenille* ou de *sulfofuchsine;* au contraire, en présence du *phénolphtaléine,* l'acide sulfureux se comporte nettement comme un acide *bibasique.*

Les dosages acidimétriques effectués, soit avec l'un, soit avec l'autre de ces réactifs colorés, donnent des résultats aussi exacts qu'avec l'iode et l'empois d'amidon.

La possibilité de doser l'acide sulfureux, soit comme monobasique avec le méthylorange ou la cochenille, soit comme bibasique avec le phénolphtaléine, permet de doser acidimétriquement cet acide, alors même qu'il est mélangé avec un autre acide libre, à la condition, toutefois, que le second acide possède une basicité absolue décelable par le méthylorange ou par la cochenille.

On peut, par la même méthode, établir la composition d'un sulfite, par exemple, d'un bisulfite de chaux.

M. Blarez, continuant sa communication, fait les remarques suivantes sur le *Dosage acidimétrique de l'acide sélénieux*.

L'acide sélénieux, bibasique, présente quelque analogie avec l'acide sulfureux, dans la façon dont il se comporte lorsqu'on sature ses solutions aqueuses par les bases en présence des différents réactifs colorés. Ainsi, en présence de la *cochenille* et du *méthylorange* il se comporte comme un acide monobasique. En présence du *tournesol* il se comporte également comme monobasique vis-à-vis de l'Ammoniaque, de la Chaux, de la Strontiane et de la Baryte. Lorsque la saturation se fait par la potasse ou la soude pour une molécule d'acide, il faut employer 1éq,5 d'alcali.

En présence du *phénolphtaléine*, il faut également 1éq,5 de base pour une molécule d'acide lorsque la base employée se trouve être de la potasse, de la soude, de l'ammoniaque, de la chaux, de la strontiane. Si on emploie la baryte, l'acide se comporte comme un acide bibasique.

La baryte peut donc servir à doser acidimétriquement l'acide sélénieux; selon que l'on fait usage de *méthylorange* ou de *phénolphtaléine*, l'acide se comporte comme un acide *monobasique* ou *bibasique*.

Comme pour l'acide sulfureux, le dosage peut se faire en présence d'acides libres forts.

M. Blarez traite ensuite de la *Difficulté de déterminer exactement l'acidité absolue des liquides de l'organisme*.

Cette difficulté est inhérente à la présence des phosphates; l'acide orthophosphorique formant, lorsqu'on le met en contact avec un excès de bases alcalino-terreuses, des composés basiques renfermant plus de 3 équivalents de base pour une molécule d'acide, comme l'indique la théorie.

Lorsque dans une solution aqueuse d'acide phosphorique on ajoute un excès de soude ou de potasse et un chlorure alcalino-terreux, il se produit un précipité analogue à ceux obtenus directement par sursaturation directe.

Nous sommes arrivés à obtenir des précipités renfermant pour une molécule d'acide orthophosphorique : 3éq,6 de chaux, 3éq,55 de strontiane, 3éq,45 de baryte.

Ces précipités sont facilement dissociés par les lavages à l'eau. Il reste combiné lorsque les eaux de lavage sont neutres : 3éq,3 de chaux, 3éq,25 de strontiane, 3éq,20 de baryte.

M. Blarez aborde, enfin, la question des *Phénomènes chimiques accompagnant la saturation de l'acide orthoarsénique par les bases alcalino-terreuses.*

Nous avons effectué cette saturation, au sein d'un calorimètre, dans un degré de dilution tel qu'un équivalent de sel formé s'est trouvé dissous ou en suspension dans environ 50 litres d'eau, et les quantités de chaleur dégagées ont été les suivantes :

QUANTITÉ DE CHALEUR DÉGAGÉE PAR LA SATURATION DE L'ACIDE ORTHOARSÉNIQUE PAR LES BASES ALCALINO-TERREUSES.

Nombre d'équivalents de base ajoutés.	Nature de la base.			
	Chaux. Cal.	Strontiane. Cal.	Baryte. Cal.	Magnésie. Cal.
1	14,5	14,17	14,0	14,86
2	12,5	12,33	13,50	11,46
3	2,52	3,88	15,50	2,03
4	0,28	1,03	0,25	»
5	0,25	»	0,50	»

Ces phénomènes sont comparables à ceux obtenus pour l'acide orthophosphorique, à l'exception, toutefois, du cas de la baryte. L'acide arsénique se comporte vis-à-vis de ce corps comme un acide tribasique, trois fois acide fort.

Nous ne croyons pas, toutefois, que les chaleurs de neutralisation indiquées ci-dessus soient les véritables chaleurs de formation des arséniates, du moins pour quelques-uns d'entre eux, car dans bien des cas la combinaison n'est pas complète, par exemple pour la chaux et la strontiane.

Les phénomènes thermiques qui accompagnent la double décomposition des arséniates alcalins trimétalliques et des chlorures alcalino-terreux donnent aussi des indications sur la chaleur de formation des arséniates, mais les réactions sont beaucoup plus complexes qu'on ne pourrait le supposer. Nous en faisons actuellement l'étude.

— M. Hautreux rend compte d'observations faites dans le Bosphore sur la température, la salure des eaux et la direction des courants à différentes profondeurs.

Ces observations prises en plusieurs points différents ont donné des résultats analogues et montrent que dans cet étroit canal, profond de 50 mètres et long de 3 kil. 25, il existe deux nappes superposées de densité et de température différentes qui sont animées de vitesses considérables et de directions opposées. La nappe superficielle, d'une épaisseur de 18 mètres, marque au densimètre d'eau de mer 17° et est à la température de 5°,8 au mois de mars; elle s'écoule de la mer Noire dans la mer de Marmara avec

une vitesse moyenne de $1^{m}50$ à 2 mètres à la seconde. La nappe inférieure, d'une épaisseur de 30 mètres, marque au densimètre 27° et est à la température de 10° au mois de mars; elle s'écoule de la mer de Marmara vers la mer Noire, du sud vers le nord, avec une vitesse moyenne de $1^{m}25$ à la seconde.

La nappe superficielle moins salée provient de l'excès de l'apport des fleuves russes sur l'évaporation de surface de la mer Noire; elle a traversé les cent lieues qui séparent le Dniéper du Bosphore sans se mélanger complètement avec les eaux de la mer Noire. Malgré les coups de vent qui bouleversent la mer Noire, le peu de salure qu'enlève le courant superficiel est compensé par l'apport constant des eaux de la Méditerranée qu'apporte la nappe inférieure, qui a un excès de 1 p. 100 de sel sur la nappe superficielle.

C'est un fait de circulation des eaux sous-marines très remarquable et qui montre bien la difficulté des mélanges des eaux, l'indépendance des courants de surface et des courants inférieurs, et ces courants eux-mêmes engendrés par de faibles différences dans la densité.

Séance du 20 janvier 1887. — M. Gayon fait au nom de M. Millardet et au sien une communication sur le traitement du mildiou par la bouillie bordelaise. Il résulte de leurs expériences que le cuivre n'est pas éliminé de la surface de la feuille après des pluies ou des rosées abondantes. Des lavages répétés enlèvent chaque fois de nouvelles doses de cuivre en quantités de plus en plus faibles mais toujours sensibles. Cette action de l'eau explique comment les taches isolées formées par la bouillie de chaux et de sulfate de cuivre peuvent étendre leur action préservatrice à toute la surface de la feuille. Le cuivre absorbé par celle-ci se trouve en presque totalité dans la cuticule, et lorsque la feuille a été attaquée par l'acide sulfurique qui détruit tous les tissus sauf la cuticule, celle-ci retient le cuivre qu'elle possède avec énergie, sans en céder de traces appréciables par le lavage. C'est cette réserve de cuivre qui permet à la feuille de résister à l'action du mildiou.

Séance du 3 février 1887. — M. Gayon annonce à la Société la mort de M. Dupetit et rappelle ses différents travaux.

« Auguste-Gabriel Dupetit était né à Auch le 15 septembre 1861. Après avoir fait d'excellentes études élémentaires, il entra comme élève dans le laboratoire d'analyses commerciales dirigé à Bordeaux

par M. Métadier, professeur à l'École de médecine. Sur les conseils de son maître il se fit inscrire, en 1878, comme élève en pharmacie. Dès ses débuts, il se distingua par une vive intelligence et par une aptitude exceptionnelle pour la chimie; aux concours de fin d'année il obtint de nombreux succès, et quand la nouvelle Faculté de médecine et de pharmacie fut organisée il y fut attaché comme préparateur de chimie. En 1881 il fut nommé préparateur à la station agronomique du Sud-Ouest; il y resta jusqu'au mois de novembre 1886. Peu de temps après, la nouvelle de sa mort est venue surprendre et attrister cruellement sa famille, ses maîtres, ses collègues et ses amis. Dupetit est décédé à Savone (Italie), le 29 décembre 1886, à l'âge de vingt-cinq ans!

» Gabriel Dupetit aimait passionnément la chimie et la savait à merveille; mais il ne lui suffisait pas de connaître les travaux des autres, il voulait lui-même faire progresser la science et s'exercer de bonne heure aux recherches du laboratoire. Bien de ses camarades de la Faculté de médecine ont mis à profit ses conseils et sa collaboration désintéressée. Plus tard, s'inspirant des travaux de M. Oré sur les principes toxiques des champignons, et des découvertes de M. Pasteur sur les infiniment petits, il s'adonna exclusivement aux études de chimie biologique, et prépara, seul ou en collaboration, plusieurs notes ou mémoires publiés dans les volumes de notre Société ou dans les comptes rendus de l'Académie des Sciences. On lui doit, en particulier, un travail étendu sur les principes toxiques des champignons comestibles, dans lequel il démontre que le *cèpe* et beaucoup d'autres champignons servant à l'alimentation sont toxiques en injection sous-cutanée, quoique inoffensifs par absorption dans les voies digestives. Le poison est soluble dans l'eau, non volatil, incristallisable, et présente les propriétés générales des ferments diastasiques. La nouveauté et l'importance de ces résultats ont valu à Dupetit une des plus hautes récompenses de l'*Académie des Sciences, Belles-Lettres et Arts de Bordeaux*.

» En songeant aux découvertes que promettaient de tels débuts, les membres de la Société regretteront longtemps la perte de leur jeune et sympathique collègue. »

Au nom de la Société, M. le Président prie M. Gayon de vouloir bien être, auprès de la famille de M. Dupetit, l'interprète des regrets unanimes de tous ses collègues.

— M. le Président prend ensuite la parole pour rendre compte à la Société de l'état de ses archives et de ses finances.

« En exécution des règles posées par nos statuts et par nos règlements intérieurs, les Commissions que vous avez nommées pour l'examen de l'état de nos archives (MM. Bayssellance, Fougeroux, Hautreux) et pour la vérification des comptes de notre trésorier (MM. Blarez, Pionchon, Thouvenel) se sont réunies jeudi dernier, et je dois, au nom du Conseil, vous faire connaître le résultat de leurs délibérations.

» Notre bibliothèque et nos archives, confiées à M. Brunel, et le classement, ainsi que la reliure de nos collections, ont fait cette année des progrès notables. L'expédition du 2e fascicule du 2e volume de la 3e série de nos *Mémoires* est terminée, et j'ai l'honneur de présenter à la Société le 1er fascicule du 3e volume de cette même série.

» L'imprimerie a terminé la composition de la copie qu'elle avait entre les mains, et je fais un appel public à MM. Millardet et Merget pour qu'ils nous donnent les mémoires qu'ils nous ont promis sur le développement du *Mildew* et l'action physiologique des vapeurs de mercure.

» Je ne surprendrai aucun de vous en disant que la Commission des finances a trouvé les comptes de notre Trésorier d'une régularité parfaite, et qu'elle les a approuvés à l'unanimité. Je les dépose sur le bureau afin qu'ils soient conservés dans nos archives.

» Les recettes de 1886 se sont élevées à 3,390 fr. et les dépenses à 2,587 fr. 20 ; le capital de la Société s'est donc accru de 802 fr. 80. Nous avions en caisse, au 31 décembre 1886, indépendamment de notre capital inaliénable, une somme de 6,033 fr. 35 ; cette encaisse est, d'ailleurs, aujourd'hui réduite à 3,000 fr. environ par le paiement des dépenses faites en 1886 pour l'impression des deux fascicules de nos *Mémoires* qui vous ont été distribués, et des comptes de divers fournisseurs dont les mémoires sont arrivés en retard à M. Fougeroux.

» Pour 1887, la Commission des finances prévoit une recette de 2,800 fr., et elle vous propose de régler comme suit le budget de cette même année :

Entretien de la bibliothèque ....F.	270
Frais de convocations..............................	250
Frais de recouvrements des cotisations.............	70
Frais de correspondance	150
Reliure des volumes................................	250
Achats de livres	250
Impression des *Mémoires*	1,500
F.	2,740

» Le budget des dépenses qui vous est proposé est donc très légèrement inférieur à celui des recettes certaines.

» Ce budget est, pour le plus grand nombre de ses chiffres, analogue à celui des années précédentes, mais il contient une innovation sur laquelle il me paraît indispensable d'appeler votre attention : c'est un crédit pour l'achat de livres.

» Vers 1860 ou 1865, lorsque la Société des Sciences physiques a commencé à prendre l'importance qu'elle a aujourd'hui conquise, nous avons été assez heureux pour entrer en relations d'échanges avec un grand nombre de Sociétés savantes de l'étranger et avec les principales Académies de l'Europe. Ces Sociétés nous transmettent depuis lors leurs comptes rendus et leurs mémoires, mais, par cela même que la fondation de notre Société est récente, les premières années de ces publications manquent à notre bibliothèque, et les recherches bibliographiques de nos collègues se trouvent, par cela même, souvent gênées. Les principales collections étrangères que nous avons ici manquent, d'ailleurs, dans les bibliothèques de Bordeaux. J'ai espoir que nous pourrons obtenir de quelques Académies étrangères le complément de nos collections, mais plusieurs seront dans l'impossibilité de le faire, les collections anciennes de leurs mémoires étant tout à fait épuisées. Dans ces circonstances, la Commission des finances a pensé qu'elle pourrait mettre à la disposition de notre Archiviste et de votre Président une somme de 250 fr. pour acquérir, si une occasion favorable se présentait, le complément de nos collections : Des *Monatsberichte der Akademie zu Berlin;* des *Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften in Wien;* des *Transactions of the Royal Society of Edinburg;* et, enfin, des *Transactions of the Cambridge philosophical Society.*

» Il est bien entendu que nous ne procéderons à l'achat des compléments des collections précédentes que si les Sociétés correspondantes ne peuvent donner satisfaction à la demande que nous leur avons adressée.

» En vous demandant le moyen de compléter les collections précédentes, qui sont d'un intérêt général, le Conseil a eu pour but d'accroître les moyens de travail qui sont mis à la disposition de nos collègues.

» J'espère, Messieurs, que vous voudrez bien approuver les comptes de votre Trésorier pour 1886, et le projet de budget de 1887. »

Les conclusions de ce rapport sont mises aux voix et adoptées.

— M. L'ARCHIVISTE entretient ensuite la Société des demandes formulées par la *Société Royale du Canada*, la *John Hopkins University*, de Baltimore, et l'*École polytechnique de Delft*, de recevoir les *Mémoires* de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux, en échange de leurs publications; il demande à être autorisé à faire cet échange. La Société accepte cette proposition à l'unanimité.

— M. BRUNEL fait à la Société une communication sur les transformations géométriques qui, appliquées à une courbe et à ses transformées consécutives, reproduisent après un nombre d'opérations déterminé la courbe de départ.

Séance du 17 février 1887. — M. GAYON dépose un travail posthume de M. Dupetit sur les champignons vénéneux.

Le mémoire de M. Dupetit est imprimé dans le tome III de la 3e série des *Mémoires de la Société*.

— M. BRUNEL fait une communication à la Société sur les courbes qu'une transformation par polaire réciproque laisse inaltérables; il énonce certaines conditions nécessaires et non suffisantes auxquelles elles doivent satisfaire.

M. Brunel fait ensuite quelques remarques sur les aspects différents des polygones de *n* côtés, et donne une notation pour représenter ces polygones.

Séance du 3 mars 1887. — MM. MILLARDET et GAYON, remarquant que, dans la bouillie bordelaise employée l'an dernier pour le traitement du mildiou, il entre beaucoup plus de chaux que n'en exige la précipitation de l'oxyde du sulfate de cuivre, ont cherché si, en diminuant la proportion de chaux, on n'obtiendrait pas des bouillies plus actives. Il doit en être ainsi théoriquement, car le mélange de sulfate de cuivre et de chaux ne cède son cuivre à la pluie ou à la rosée que lorsque toute la chaux a été saturée par l'acide carbonique de l'air. Le moment où le traitement deviendra efficace contre les spores du *Peronospora vitis* sera donc d'autant plus rapproché du jour de l'application, que la bouillie sera moins riche en chaux. L'expérience a confirmé pleinement la théorie, ainsi que le prouvent les chiffres suivants, qui donnent le nombre de jours écoulés entre le moment de l'exposition à l'air des diverses bouillies et celui de l'apparition du cuivre dans l'eau de pluie :

Avec la bouillie ancienne..................	20 jours.
En diminuant la chaux à la moitié	15 —
— — . au quart...........	14 —
— — . . au huitième........	9 —

Ainsi, l'excès de chaux dans la bouillie non seulement est nuisible au fonctionnement des appareils de pulvérisation, mais encore il retarde considérablement l'effet du traitement.

Séance du 17 mars 1887. — M. DUBREUILH est nommé membre titulaire.

— M. JOANNIS présente à la Société un appareil qui est une modification à la machine pneumatique à mercure d'Alvergniat. Les perfectionnements consistent dans la suppression du tube de caoutchouc qui introduit souvent de l'air ou de l'humidité dans l'appareil, et dans une modification du robinet à trois voies qui supprime l'espace nuisible. Enfin, l'appareil est de dimensions beaucoup plus petites et fonctionne au moyen d'une trompe à eau en verre.

M. Joannis entretient ensuite la Société de ses recherches sur les alliages des métaux alcalins; il décrit les appareils et donne les premiers résultats obtenus.

Séance du 31 mars 1887. — MM. GAYON et DUBOURG, revenant sur la fermentation de la dextrine et de l'amidon par leur mucor, annoncent que l'hydratation de ces hydrates de carbone est due à un ferment soluble; sécrété seulement par les cellules sphériques de la moisissure, et non par son mycélium normal. On met le fait en évidence, soit en précipitant par l'alcool les liqueurs dans lesquelles le mucor a vécu comme ferment alcoolique, soit en maintenant à 50° une solution ensemencée de dextrine. Dans ces conditions, la dextrine se transforme en sucre réducteur. Exemple :

	SUCRE RÉDUCTEUR p. 100.	DEXTRINE p. 100.
	—	—
Avant	0,32	7,33
Après	2,52	4,08

Séance du 28 avril 1887. — MM. MILLARDET et GAYON, après avoir reconnu qu'on pouvait, avec grand avantage, diminuer la proportion de chaux contenue dans la bouillie bordelaise ordinaire, et en tenant compte de la quantité théorique de sulfate de cuivre (2 kil. 1/2) nécessaire au traitement d'un hectare de vigne, sont arrivés à une formule nouvelle de la bouillie, et la recommandent à tous les viticulteurs, comme *bouillie d'application générale.* Voici cette formule :

Eau	100 litres.
Sulfate de cuivre	3 kilos.
Chaux vive	1 —

Comme cette formule renferme, théoriquement, trois fois plus de sulfate de cuivre qu'il ne serait nécessaire, MM. Millardet et Gayon proposent, en outre, à titre d'essai, les deux bouillies suivantes :

	BOUILLIES D'EXPÉRIENCES.	
	N° 1.	N° 2.
Eau	100 litres.	100 litres.
Sulfate de cuivre	2 kilos.	1 kilo.
Chaux vive	670 grammes.	340 grammes.

Des essais comparatifs faits pendant la saison prochaine donneront la mesure de l'efficacité relative de ces diverses bouillies.

Séance du 12 mai 1887. — M. Forquignon, professeur à la Faculté des sciences de Dijon, ancien secrétaire de la Société, est nommé membre correspondant.

— M. Roux est nommé membre titulaire de la Société.

— M. Rayet entretient la Société du Congrès d'astronomie photographique qui s'est réuni à l'Observatoire de Paris, le 16 avril dernier, et auquel ont assisté les Directeurs des principaux Observatoires et les astronomes les plus éminents du monde entier.

L'idée d'appliquer la photographie à l'étude des objets célestes et à la construction d'une carte générale du ciel est déjà ancienne, ainsi que M. Rayet l'a montré dans une série de *Notes sur la Photographie astronomique,* qu'il vient de publier à l'ocasion du Congrès; mais le procédé n'est devenu réellement pratique qu'à la suite de l'invention des plaques sèches au gélatino-bromure d'argent. Les résultats merveilleux obtenus dans ces dernières années par MM. Rutherford, Draper, Warren, de La Rue, Huggins, Common, Pickering,.... montrent, d'ailleurs, que le moment est venu d'utiliser ce nouveau moyen de recherches, pour l'étude détaillée de certaines régions du ciel et la construction d'une carte générale du ciel tout entier.

Un travail aussi important n'est d'ailleurs possible que par la réunion des efforts d'un grand nombre d'Observatoires, et c'est pour lui donner l'uniformité nécessaire que le Congrès avait été réuni par M. l'amiral Mouchez, sous les auspices de l'Académie des Sciences.

Les résolutions détaillées du Congrès, ainsi que les procès-verbaux de ses séances, seront prochainement publiés et M. Rayet veut seulement indiquer les motifs de ses principales résolutions.

Le Congrès a d'abord décidé que les instruments employés seraient composés d'un objectif de 33 centimètres de diamètre et de 3^m43 de distance focale; l'objectif a été préféré au miroir en verre argenté comme donnant une moindre courbure au champ, et comme restant identique à lui-même, tandis que les miroirs s'altèrent rapidement; d'un autre côté, les images sont plus calmes avec une lunette qu'avec un télescope. La distance focale de 3^m43 donne sur l'épreuve 1 millimètre pour un angle de 1 minute, ce qui est pratique pour les réductions. On remarquera que les objectifs ont un foyer court, ce qui augmentera l'éclat des images.

Les étoiles doivent, suivant les décisions du Congrès, être photographiées jusqu'à la quatorzième grandeur, ce qui exige environ 15 minutes de pose pour chaque épreuve. Ce sont ces épreuves qui doivent servir à la construction de la carte générale du ciel, vivement désirée par les astronomes observateurs, qui sera infiniment plus complète que toutes celles que nous avons aujourd'hui. Cette carte sera, en particulier, très précieuse pour l'étude de la distribution des étoiles.

Enfin, outre la série des photographies destinées à la carte, il sera fait une seconde série d'épreuves avec une durée de pose limitée à trois minutes, destinées à ne donner que les étoiles de onzième grandeur. On espère déduire de ces photographies, faites avec toutes les précautions nécessaires pour leur donner une grande exactitude, un catalogue d'environ 2,500,000 étoiles.

M. Rayet entre ensuite dans la discussion des précautions qui devront être prises pour l'obtention de ces dernières épreuves, et il indique sommairement les difficultés de l'entreprise que les astronomes ont résolu de conduire à bonne fin. Ces difficultés ne sont pas insurmontables, mais leur solution exige de nombreux travaux préliminaires dont le Congrès a confié l'exécution à un comité permanent formé des Directeurs des Observatoires qui doivent prendre part au travail, et de quelques astronomes spécialement désignés par leurs recherches antérieures.

M. Rayet rappelle, enfin, que l'Observatoire de Bordeaux a été désigné pour prendre part aux travaux photographiques et que son instrument est déjà commandé depuis six mois. L'installation se fera à Floirac avec le concours de la ville de Bordeaux qui a voté pour cela une somme de 15,000 fr., et de l'État qui doit payer 42,000 fr. pour l'instrument et 10,000 fr. pour la coupole.

Séance du 26 mai 1887. — MM. Millardet et Gayon signalent

les dangers que présente le traitement des vignes mildiousées par les solutions aqueuses de sulfate de cuivre. Les feuilles ont été brûlées, en 1886, aux doses de 5 grammes et même de 3 grammes de sel par litre. Pour que ce remède soit inoffensif pour la feuille de vigne, il faut donc prendre des solutions très étendues; mais, alors, on s'expose à les trouver absolument inefficaces contre le *Peronospora*. En effet, les eaux de source et de puits déterminent toujours un précipité plus ou moins abondant dans les dissolutions concentrées de sulfate de cuivre, comme le montrent les exemples suivants :

ORIGINE DE L'EAU.	DEGRÉ HYDROTIMÉTRIQUE.	POIDS DE sulfate de cuivre précipité PAR LITRE D'EAU.
Eau de puits de Saint-Loubès....	21.5	500 mmgr.
Puits de l'Observatoire..........	24.0	800 —
Eau de la ville de Bordeaux.....	26.0	800 —
Puits Millardet.................	44.0	1216 —
Eau des Vergnes...............	48.0	1216 —
Puits Rayet....................	58.0	1400 —
Puits Gayon....................	92.0	2400 —

Il résulte de là que, pour une même dose de sulfate de cuivre, certaines eaux, à degré hydrotimétrique peu élevé, pourront brûler les feuilles, et que d'autres, riches en sels calcaires, seront sans action toxique et produiront un effet nul sur le développement du mildiou.

L'eau céleste et l'ammoniure, qui ont été également préconisés comme remèdes primitifs contre les invasions de mildiou, sont aussi dangereuses à appliquer que le sulfate de cuivre, bien que, grâce au grand excès d'alcali, elles ne soient pas précipitées par les eaux. Elles produisent des brûlures, dès que la concentration est un peu trop forte.

Séance du 9 juin 1887. — M. Bergonié entretient la Société des *Recherches sur les échanges gazeux dans la respiration de l'homme*, qui ont été entreprises par MM. F. Jolyet, C. Sigalas et lui-même dans les laboratoires de la Faculté de médecine.

Historique. — On peut ranger les appareils construits par les physiologistes pour l'étude des échanges gazeux dans la respiration de l'homme ou des animaux, en deux classes distinctes :

1° Les auteurs ont surtout voulu rester dans des conditions physiologiques normales. Ils ont fait respirer l'individu en expérience dans l'air extérieur ou dans un courant de cet air produit dans

leurs appareils (Andral et Gavarret, 1843; Vierordt, 1845; Scharling; Speck, 1871; Pettenkofer et Voit, 1862; Fréderick, 1880; Richet et Hanriot, 1886);

2° Les auteurs ont essayé de réaliser l'idée de Lavoisier : « Faire vivre un animal pendant un temps suffisamment prolongé dans un espace clos où l'oxygène consommé soit sans cesse remplacé par de nouvel oxygène, et où l'acide carbonique expiré soit absorbé sans cesse » (Lavoisier et Seguin, 1788; Regnault et Reiset, 1849; Ludwig et ses élèves; Pflüger et ses élèves; Hoppe Seyler; Jolyet et Regnard, 1878).

Description de l'appareil. — L'appareil qui a servi à nos recherches, et qui est installé dans le laboratoire de médecine expérimentale de la Faculté de médecine et de pharmacie, appartient à cette dernière classe. Nous ne pouvions utiliser un appareil de la première catégorie, ou un appareil analogue, étant donné le but de nos recherches qui est de déterminer surtout le rôle de l'azote dans la respiration.

Il comprend quatre parties communiquant entre elles et formant un espace clos et rigide : 1° une cloche dans laquelle le sujet en expérience respire; 2° un système de pipettes oscillantes à glycérine; 3° un appareil condenseur de CO^2; 4° un appareil servant à fournir et à mesurer l'oxygène.

Le sujet en expérience est muni d'un masque hermétique qui communique par un robinet à trois voies avec une des tubulures de la cloche. A une tubulure opposée est adapté un sac de caoutchouc de un litre de capacité. L'individu respire d'abord au dehors. Lorsque l'expérience doit commencer, on tourne convenablement la clef du robinet à trois voies, juste à la fin d'une inspiration. La première expiration dans la cloche est recueillie par le sac de caoutchouc, et, par ce moyen, le sujet situé au dehors de la cloche se comporte comme s'il y était inclus, c'est-à-dire sans y produire d'autres modifications de pressions autres que celles qui résulteront de la consommation graduelle d'oxygène.

L'air vicié de la cloche est entraîné par le mouvement des pipettes à glycérine, dont le rôle unique est ici de le faire passer à chaque mouvement de va-et-vient à travers l'appareil condenseur de l'acide carbonique.

Celui-ci se compose de deux flacons intercalés sur les tubes de communication des pipettes à la cloche; ils renferment une dissolution titrée de potasse qui est violemment agitée et pulvérisée au moyen d'un mouvement rapide et saccadé communiqué par une

bielle articulée au volant du moteur qui met les pipettes en mouvement.

L'avantage de cette séparation des deux systèmes, pipettes et condenseurs, qui sont réunis dans l'appareil de Regnault et Reiset, est : 1° de pouvoir donner aux pipettes des dimensions assez grandes pour opérer une bonne circulation d'air, tout en permettant de restreindre au nécessaire les quantités de dissolution de potasse employées ; 2° par le fait de la pulvérisation de la potasse, de dépouiller instantanément l'air qui traverse les condenseurs de tout son acide carbonique.

L'absorption de CO^2 tend à produire une diminution de pression utilisée pour faire un appel d'oxygène qui vient remplacer l'acide carbonique absorbé.

Avantages de l'appareil. — On peut donner au taux de l'acide carbonique dans l'air de l'appareil toutes les valeurs possibles, en faisant varier le volume des pipettes et le nombre de leurs mouvements. En effet, en désignant par Q la quantité de CO^2 contenue dans l'unité du volume de l'air de l'appareil, par V le volume des pipettes, par R la quantité de CO^2 exhalé à chaque mouvement respiratoire dont le nombre est n pendant la montée d'une des pipettes, on a

$$Vq = nR,$$

d'où

$$q = \frac{nR}{V}.$$

On peut aussi connaître très simplement, *a priori*, le volume des pipettes étant donné, quel doit être le volume de la cloche (variable à volonté) pour obtenir un taux choisi d'acide carbonique.

Cette élasticité de l'appareil nous permettra d'étudier la manière dont varient les échanges gazeux respiratoires lorsqu'on fait varier le taux de CO^2 dans l'air inspiré, étude dont l'importance est facile à apercevoir. Elle nous permettra, de plus, de limiter la masse d'air servant à la respiration, de telle sorte qu'une quantité d'azote exhalée ou absorbée, fût-elle très petite, fasse varier notablement le taux de ce gaz.

Inscripteurs adjoints a l'appareil. — L'inscription se fait sur un cylindre de 1 mètre de développement dont la vitesse de rotation peut être facilement variée. On la règle de telle façon que l'inscription des mouvements respiratoires soit nette. Les styles inscripteurs sont au nombre de trois et appartiennent : 1° à un signal

électro-magnétique de Deprez, qui trace toutes les minutes une petite ligne parallèle aux génératrices du cylindre. Il est commandé par un cadran dont chaque minute porte un contact électrique touché par la grande aiguille; 2° à un deuxième signal électro-magnétique qui trace également une petite ligne parallèle aux génératrices du cylindre toutes les fois qu'un litre d'oxyène a été consommé. Il est commandé par l'aiguille du compteur d'oxygène qui à chaque tour vient toucher un contact fixé sur le cadran au point O; 3° à un tambour de Marey, qui trace le graphique des mouvements respiratoires. Il est réuni par un tube de caoutchouc à un pneumographe de P. Bert, que le sujet en expérience fixe sur le thorax.

En résumé, on peut avec ces appareils inscripteurs, et par la seule lecture du graphique, à la fin d'une expérience, et sans erreur possible, connaître : 1° le temps, à quelques secondes près, qu'elle a duré; 2° le nombre de litres d'O qui ont été consommés (les sous-multiples du litre étant donnés directement par les divisions du cadran du compteur); 3° le rythme, l'amplitude et le nombre des mouvements respiratoires et leurs variations pendant la durée d'une expérience.

Résultats obtenus. — Les résultats que peut fournir et qu'a fournis l'appareil sont de deux sortes; avec tous les autres il peut donner directement la quantité d'oxygène absorbé et d'acide carbonique formé dans la respiration de l'homme sain et de l'homme malade, par conséquent le quotient $\frac{CO^2}{O}$ désigné par quotient respiratoire. Il peut donner, de plus, la variation de la quantité d'azote dans l'appareil, pendant la durée de l'expérience, et indique s'il y a eu exhalation ou absorption de ce gaz.

Chiffres fournis par quelques expériences faites sur un homme de 55 kilos, ayant respiré dans l'appareil de une heure à trois heures et demie à chaque expérience. Les chiffres sont ramenés à l'heure.

Expériences.	CO^2	O	$\frac{CO^2}{O}$	Températures.
I à jeun.	12889cc	14778cc	0.872	16°
II —	13783	15255	0.90	14°,5
III —	15032	17025	0.884	14°,7
IV —	12306	15074	0.816	17°
V en digestion.	15015	16377	0.92	17°
VI à jeun (malade).	12306	15074	0.816	20°
VII travail pénible.	25657	29204	0.878	26°

On peut tirer de ce tableau des conséquences nombreuses relatives à la variation des quantités d'O absorbé et de CO^2 exhalé à l'état de digestion ou à jeun, avec les diverses températures, au repos ou pendant un travail pénible.

Le dosage de l'azote est extrêmement laborieux, et, bien que notre conviction soit faite sur le sens du phénomène, nous attendons pour donner des chiffres de nouvelles expériences.

— MM. GAYON et DUBOURG décrivent le mucor à l'aide duquel ils obtiennent la fermentation de la dextrine et de l'amidon.

Grâce à la propriété curieuse de cette moisissure, ils ont pu obtenir de l'alcool avec des bières finies depuis longtemps, et dans lesquelles les levures alcooliques ordinaires ne pouvaient plus se développer. Exemple :

	ALCOOL FORMÉ p. 100.
	—
Avec bière Grüber	3.8
— Fischer	4.6
— de Bavière	3.7

Si l'on ensemence un même mout, comparativement avec de la levure de bière et avec de la levure de mucor, on obtient, toutes choses égales, d'ailleurs, une bière plus riche en alcool, mais plus fade, avec la moisissure qu'avec les saccharomyces. Ainsi, ils ont trouvé :

	ALCOOL p. 100.
	—
Avec de la levure de brasserie	5.2
— de mucor	6.5
DIFFÉRENCE	1.3

Séance du 23 juin 1887. — M. BRUNEL lit plusieurs passages d'une notice étendue qu'il a consacrée à une étude des travaux originaux de M. Hoüel, et à la démonstration de l'influence considérable que l'ancien archiviste de la Société a exercée sur les méthodes d'enseignement de la géométrie élémentaire et du calcul infinitésimal.

Sur la proposition de M. le Président, la Société décide que le travail de M. Brunel sera publié dans le tome IV de la 3e série de ses *Mémoires*, et qu'il sera accompagné de la reproduction d'un portrait de M. Hoüel.

Séance du 7 juillet 1887. — M. PETIT est élu membre titulaire.

— M. FLAMME analyse rapidement ses recherches sur l'approximation des fonctions de grands nombres.

D'après une remarque fondamentale, faite pour la première fois par M. Darboux, si l'on se donne une fonction réelle ou imaginaire $f(x)$, d'une variable réelle x, satisfaisant aux conditions suivantes:

1° $f(x)$ est une fonction périodique, admettant la période réelle 2π;

2° $f(x)$ et ses $(p-1)$ premières dérivées restent finies et continues pour toute valeur de x comprise entre 0 et 2π;

3° Cette fonction admet, dans le même intervalle, au moins un point critique α tel que, dans le domaine de α, la dérivée p^{eme}, en supposant que ce soit la première dérivée de $f(x)$ qui devienne infinie en ce point, puisse se mettre sous la forme :

$$\frac{A}{(x-\alpha)^{\gamma}} + \psi(x);$$

$\psi(x)$ restant finie en α, et γ satisfaisant aux inégalités :

$$0 < \gamma < 1,$$

on pourra poser :

$$\lim_{n=\infty} \left[n^{p+1-\gamma} a_n \right] = M,$$

M désignant une quantité qui reste finie pour n infini, et a_n figurant le coefficient de cos nx ou de sin nx dans le développement de $f(x)$ en série trigonométrique.

Grâce à cette remarque, M. Darboux arrive à montrer comment on pourra, étant donnée une fonction quelconque A_n du grand nombre n, obtenir pour cette fonction une expression qui soit d'autant plus approchée que la valeur de n est plus considérable. Mais il suppose pour cela que l'on ait obtenu d'avance, sous forme finie, une fonction génératrice de A_n qui soit holomorphe autour de l'origine.

En recherchant les valeurs approchées des coefficients éloignés dans les développements du mouvement elliptique, j'ai été amené à démontrer que la considération d'une fonction génératrice de A_n, holomorphe autour de l'origine, n'est pas nécessaire, mais qu'il suffit d'obtenir, sous forme finie, une fonction génératrice de A_n qui soit holomorphe entre deux circonférences concentriques à l'origine. Pour parvenir à ce résultat, j'ai dû, tout d'abord, par extension d'un théorème dû à M. O. Bonnet, établir qu'une fonction, holomorphe entre deux circonférences concentriques à l'origine, et, par suite, susceptible d'être représentée, entre ces deux circonférences, par une double série ordonnée suivant les puissances

entières, positives et négatives, de la variable, continuera à être représentée par la même série en tous les points de l'une quelconque des deux circonférences limites, à la seule condition qu'elle soit, sur toute la circonférence considérée, développable en série trigonométrique ordonnée suivant les sinus et cosinus des multiples de l'argument de la variable.

Ce premier résultat, auquel je suis parvenu, n'est au fond qu'une généralisation directe de la théorie développée dans le mémoire de M. Darboux. En considérant ensuite l'expression bien connue :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(\mathrm{P})} f(z)\, z^{n-1}\, dz,$$

du coefficient A_{-n} de z^{-n} dans la double série qui représente $f(z)$, et, interprétant convenablement les conditions dans lesquelles l'approximation de ce coefficient est possible, je suis arrivé, par une nouvelle généralisation, à une méthode d'approximation applicable à l'intégrale :

$$M_n = \int_a^b f(z)\, z^n\, dz,$$

dans laquelle le contour $a-b$ et la fonction $f(z)$ sont quelconques, pourvu qu'il n'existe aucun contour, équivalent au contour donné, et sur lequel le maximum du module de z ait lieu en l'une des deux limites a ou b. Pour cela, j'ai pris pour fonction génératrice de M_n la fonction :

$$F(t) = \int_a^b \frac{f(z)}{1 - z t^{-1}}\, dz,$$

le contour $a-b$ dans la fonction $F(t)$, ainsi que dans M_n, étant supposé confondu avec celui des contours, équivalents au contour donné, sur lequel le maximum du module de z est le plus petit possible. Remarquant alors que l'on peut faire abstraction de toute la partie de la fonction $F(t)$ relative à la portion du contour $a-b$ qui n'est pas voisine du point α où a lieu le maximum du module de z, j'ai recherché, en décomposant convenablement le contour d'intégration restant, les termes de l'autre partie de la fonction $F(t)$ qui ne sont pas holomorphes en α, et qui, par suite, doivent servir au calcul de l'expression approchée que l'on a en vue.

Au moyen d'un changement de variable, j'ai ensuite étendu mes

recherches au cas où l'on veut trouver l'expression approchée de l'intégrale :

$$\int_a^b f(z)\varphi^n(z)\,dz.$$

Les dernières généralisations, dont je viens de parler le plus sommairement possible, renferment comme cas particuliers les différents résultats obtenus par M. Darboux dans son mémoire déjà cité.

L'extension, ainsi donnée à la méthode d'application de l'éminent professeur, m'a permis de trouver ensuite les expressions approchées des coefficients éloignés dans les développements du mouvement elliptique ordonnés suivant les sinus et cosinus des multiples de l'une quelconque des trois anomalies.

— M. Bouchard décrit un nouveau procédé de conservation des cadavres.

L'augmentation progressive du nombre des élèves inscrits au laboratoire d'anatomie de la Faculté de médecine de Bordeaux m'a mis dans l'obligation de rechercher un procédé de conservation des cadavres qui joigne à son innocuité absolue des garanties d'antiputricité aussi prolongée que possible. Les injections à base d'acide phénique ont l'inconvénient de leur odeur; elles donne de plus aux tissus une coloration brun noirâtre fort déplaisante. Celles à base d'arsenic déterminent un dégagement presque inévitable d'hydrogène arsénié, en petite quantité il est vrai, mais qui souvent provoque des nausées et des diarrhées.

Depuis longtemps, Beaunis et moi avions constaté les propriétés antiputricides de la glycérine boratée; déjà, dans la deuxième édition de notre *Traité d'anatomie,* nous avions indiqué le liquide conservateur, mais nous nous étions bornés à l'employer pour des pièces isolées. Une fois entré en possession de nos nouveaux pavillons, je me suis décidé à expérimenter ce moyen sur une plus grande échelle et à l'appliquer à la conservation des sujets entiers, autopsiés ou non.

La glycérine chauffée à 60 degrés environ est saturée de borate de soude, après le refroidissement elle est sirupeuse et peu propre par sa densité à être injectée dans les vaisseaux, aussi faut-il la diluer avec de l'alcool dont la proportion variera suivant que l'on se proposera de conserver plus ou moins longtemps les sujets.

A parties égales de glycérine boratée et d'alcool, le liquide assurera une conservation à peu près indéfinie.

L'injection doit se faire de la manière suivante : le liquide est mis dans des barillets élevés à la hauteur de 3 à 4 mètres et munis de tuyaux de caoutchouc garnis d'un robinet; une canule est placée dans une artère (la carotide de préférence), le caoutchouc est adapté à la canule et le robinet ouvert. La pression produit ainsi une injection lente et continue qui fait pénétrer le liquide dans tous les tissus, la glycérine en soutire l'eau et la remplace. Au bout de dix à douze heures, du soir au matin, l'injection est complète et le liquide ne passe plus. On lie l'artère et l'on conserve le sujet jusqu'au moment de s'en servir.

Voici les résultats obtenus, tout le monde a pu les contrôler :

Absence absolue de la putréfaction, partant pas la moindre odeur; innocuité des piqûres anatomiques, conservation de la consistance et de la coloration des tissus.

Au commencement des chaleurs, on avait émis des doutes sur la manière dont les sujets se comporteraient en plein été, j'ai donc dû en injecter et les conserver comme pièces de démonstrations. A l'heure présente, il existe dans mon laboratoire un cadavre de jeune femme qui a traversé une longue période de chaleurs excessives sans que la moindre altération, la moindre odeur ait dévoilé la putréfaction.

Sans entrer dans des détails qui ne seraient pas ici à leur place, je dois cependant faire observer une condition indispensable pour les pièces mises en service dans les salles de dissection, c'est qu'elles restent à l'abri de l'eau; en les hydrotomisant on enlèverait, en effet, le liquide conservateur et la putréfaction se produirait.

Il importe, de plus, il est à peine besoin de le dire, de ne pas attendre, pour injecter le sujet, que la putréfaction s'en soit déjà emparée; en effet, dès que des gaz putrides sont développés dans les tissus, ils en compriment les capillaires, et l'injection n'y pénètre plus.

Ce procédé de conservation est employé aujourd'hui à Alger, à Rome, à Boston, et va être introduit à la Faculté de Rio-de-Janeiro, dont l'éminent doyen, M. le Comte de Saboix, est venu constater lui-même mes résultats.

— MM. F. Berland et A. Chenevier décrivent un appareil nouveau construit sous leur direction et destiné à mesurer la fluidité des huiles employées dans le commerce pour le graissage des machines. L'instrument est disposé de manière à permettre cette mesure à différentes températures.

Le mémoire de MM. Berland et Chenevier est inséré dans le tome III (3e série) des *Mémoires de la Société.*

— M. Millardet, au nom de la Commission d'impression, donne lecture du rapport suivant sur un mémoire de M. L. Petit :

« M. Petit a présenté à la Société un mémoire ayant pour titre: *Étude sur le Pétiole des dicotylédones au point de vue de l'anatomie comparée et de la classification.*

» Dans ce travail, l'auteur a étudié le pétiole de plus de quatre cents plantes dicotylédones, soit au point de vue du parcours des faisceaux fibro-vasculaires, soit à celui de la composition histologique des autres parties qui constituent cet organe. Huit belles planches représentent les faits les plus importants signalés au cours de son travail.

» Toutes les observations de détail échappent à une analyse aussi rapide que celle qu'il m'est possible de faire ici. Je me bornerai à signaler quelques-uns des résultats les plus généraux.

» L'auteur a pu ramener les dispositions de parcours les plus communes des faisceaux fibro-vasculaires du pétiole, dans l'ensemble des dicotylédones, à une dizaine de types bien caractérisés. A côté de ces types normaux, qui sont de beaucoup les plus simples et les plus fréquents, il a signalé quelques dispositions plus rares et extrêmement curieuses (*Amentacées, Platanées*, etc.). Des recherches patientes et méthodiques l'ont amené à donner de ces dernières l'explication la plus satisfaisante.

» Quant à la composition histologique des autres parties ou tissus qui constituent le reste du pétiole, elle n'a pas été étudiée avec moins de soin que le trajet des faisceaux fibro-vasculaires; et, ici encore, l'auteur est arrivé à un ensemble important de résultats à la fois nouveaux et intéressants au point de vue de l'anatomie et de la classification. Il a montré, par exemple, que les particularités histologiques dont il est question peuvent habituellement caractériser des familles tout entières et souvent des genres.

» L'anatomie et la classification, en général, et les recherches de paléontologie végétale et de pharmacognosie, en particulier, pourront, dans plus d'un cas, tirer un parti avantageux du mémoire de M. Petit. »

En conséquence, la Commission d'impression a l'honneur de proposer à la Société d'insérer le travail de M. Petit dans ses *Mémoires.*

Les conclusions de la Commission d'impression sont adoptées et le mémoire de M. Petit *Sur le Pétiole des dicotylédones* est publié dans le tome III (3e série) des *Mémoires de la Société.*

MONOGRAPHIE DE LA FONCTION GAMMA

PAR M. G. BRUNEL

INTRODUCTION

En 1817, Legendre avait consacré une section de ses *Exercices de calcul intégral* à l'étude des propriétés de la fonction gamma « lien naturel d'une multitude de transcendantes et source d'où se tirent aisément toutes les formules qui concernent la comparaison de ces transcendantes, leur réduction et leur évaluation ». Il considérait cette branche nouvelle de l'analyse comme amenée à peu près dès cette époque au point de perfection dont elle est susceptible.

Et, cependant, les travaux relatifs à la théorie et aux applications de cette fonction se sont, depuis Legendre, succédé d'une façon ininterrompue. Les Mémoires de Cauchy, Binet, Lejeune-Dirichlet, Liouville, Genocchi, Weierstrass, Schlömilch, Gilbert, Prym, Hermite, Bourguet ont soulevé et résolu des questions nouvelles. Les progrès généraux de l'analyse ne pouvaient manquer de se prêter à une étude plus approfondie de cette fonction.

Aussi, des mémoires nombreux ont-ils été publiés de côté et d'autre, parsemés dans les différents journaux mathématiques.

Nous avons cru qu'il ne serait point inutile de publier une monographie de la fonction gamma. Prenant comme base la

suite des principaux théorèmes qui se présentent dans cette théorie, nous nous sommes efforcé d'y rattacher les différents travaux auxquels ils ont donné naissance; nous avons essayé de donner en chaque occasion des renseignements bibliographiques aussi complets que possible.

Nous croyons qu'il sera bientôt indispensable de faire pour chaque branche de l'analyse un travail à peu près semblable à celui que nous offrons aujourd'hui.

Les *Tables d'intégrales définies* de Bieren de Haan, le *Bulletin* de Darboux, le *Jahrbuch* d'Ohrtmann nous ont fourni des matériaux nombreux qui se sont complétés peu à peu par les indications bibliographiques que nous fournissaient les Mémoires eux-mêmes.

Cette monographie est certainement incomplète; nous croyons pourtant qu'elle présente quelque intérêt. Nous avons eu à notre disposition, outre la bibliothèque universitaire, la bibliothèque de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux et celle si riche de M. Hoüel.

Bordeaux, mars 1886.

TABLE DES MATIÈRES

ÉTUDE DE LA FONCTION GAMMA

§ **1.** L'intégrale

$$(1) \qquad \int_0^\infty e^{-x} x^{a-1} dx,$$

dont la valeur dépend du seul nombre a, a été nommée par Legendre *intégrale Eulérienne de seconde espèce* ou *fonction gamma;* les géomètres ont adopté presque unanimement la dénomination de $\Gamma(a)$ par laquelle il l'a représentée. Nous désignerons sous le nom d'argument la quantité a qui apparaît dans l'intégrale définie considérée. Cette intégrale définie est susceptible de formes bien différentes.

Si l'on pose

$$x = l\,\frac{1}{y},$$

les limites deviennent 1 et 0 et l'on a

$$(2) \qquad \Gamma(a) = \int_0^1 \left(l\,\frac{1}{y}\right)^{a-1} dy.$$

Si, au contraire, on pose

$$x = e^z,$$

les limites deviennent $-\infty$ et $+\infty$, et l'on a

$$(3) \qquad \Gamma(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{az}\, e^{-e^z}\, dz.$$

Il est évident que l'on pourrait donner à la fonction gamma bien des formes différentes. Nous nous bornons pour l'instant aux précédentes, en nous réservant de donner plus tard, quand la chose nous sera nécessaire, les formules différentes des précédentes qui présentent quelque intérêt.

C'est l'étude de l'interpolation de la série

$$1, 2, 6, 24, 120, \ldots$$

qui a donné naissance à la théorie de la fonction gamma, aux travaux de Stirling et d'Euler, dont nous aurons souvent l'occasion de parler. Cette série avait attiré l'attention de Goldbach et de Daniel Bernoulli. C'est probablement à l'instigation de Bernoulli qu'Euler s'en occupa. Il arriva immédiatement à la représentation d'un terme quelconque par l'intégrale définie (2), et l'on ne peut douter que c'est là le point de départ de ses nombreux travaux tant sur cette intégrale que sur les questions diverses qui s'y rattachent. Nous aurons à revenir plus tard sur les lettres d'Euler à Goldbach, contentons-nous pour le moment de dire qu'Euler avait déjà senti le besoin d'une notation particulière pour ce genre d'intégrales définies; il pose, par exemple,

$$\left[\frac{m}{n}\right] = \int_0^1 \left(l\,\frac{1}{x}\right)^{\frac{m}{n}} dx,$$

dans son mémoire intitulé « *Evolutio formulæ integralis* $\int x^{f-1}dx(lx)^{\frac{m}{n}}$, *integratione a valore* $x=0$ *ad* $x=0$ *extensa* ». (*Nov. Comment. Acad. Sc. Petropolitanæ*, t. XVI, p. 91-139. *Calculus integralis*, t. IV, p, 78-121.)

Euler étudia aussi celte intégrale sous la forme (1) : *De valoribus integralium a termino variabili* $x = 0$ *usque ad* $x = \infty$ *extensorum. M. S. Academiæ exhib. d. 30 Aprilis 1781.* — *Calculus integralis*, t. IV, 337-345.

On a reproché à Legendre (Lacroix, *Calc. diff. et int.*) d'avoir introduit une dénomination nouvelle et un nom nouveau pour une fonction déjà étudiée à différents points de vue et que l'on

appelait déjà avant lui de deux noms différents (factorielle, faculté analytique). Et cependant, la dénomination de Legendre a prévalu, à cause même de sa simplicité et de sa commodité.

Gauss a proposé pour la même fonction un symbole différent. Dans ses *Disquisitiones generales circa seriem infinitam*

$$1+\frac{\alpha}{1}\frac{\beta}{\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2}\frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}x^2+\ldots,$$

il représente par $\Pi\,(a-1)$ la fonction $\Gamma\,(a)$ de Legendre. La notation de Gauss a été peu employée.

C'est dans une note manuscrite placée en marge du mémoire que nous venons de citer que Gauss donne à la fonction gamma la forme (3), qu'il indique comme la meilleure définition de cette fonction (*Gauss Werke*, t. III, p. 230).

Nous prendrons en général la fonction $\Gamma\,(a)$ sous la forme

$$\Gamma(a)=\int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}\,dx. \tag{1}$$

Supposant d'abord l'argument réel, nous nous demanderons en premier lieu à quelle condition l'intégrale définie présente une signification.

L'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}\,dx$$

doit être considérée comme la limite de l'intégrale

$$\int_\varepsilon^l e^{-x}x^{a-1}\,dx$$

lorsque l augmente et que ε a pour limite zéro. Les règles connues qui permettent de reconnaître si l'intégrale a une signification, montrent que l'existence de la limite supérieure n'apporte aucune restriction à la valeur de a. Il n'en est plus de même pour la limite inférieure; il faut que a soit positif pour que l'intégrale conserve un sens. Ce n'est que par une discussion approfondie des propriétés de la fonction gamma et par des

définitions autres que celle donnée par la formule (1) que nous arriverons successivement à définir pour des valeurs quelconques de l'argument une fonction qui coïncide avec la précédente lorsque a est positif.

§ **2.** On a, par définition,

$$\Gamma(a+1)=\int_0^\infty e^{-x}x^a\,dx.$$

Or, en intégrant par parties

$$\int e^{-x}x^a\,dx = -e^{-x}x^a + a\int_1 e^{-x}x^{a-1}\,dx$$

et en remarquant que si l'on suppose a positif, $e^{-x}x^a$ est nul aux deux limites 0 et a,

$$\Gamma(a+1)=a\int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}\,dx = a\Gamma(a).$$

La relation

$$(1)\qquad \Gamma(a+1)=a\Gamma(a)$$

constitue la première propriété de la fonction gamma; nous l'appellerons *relation fonctionnelle*.

L'intégration directe donne

$$\Gamma(1)=1,$$

et par conséquent, à cause de la relation fonctionnelle, on a, en supposant a entier,

$$(2)\qquad \Gamma(a+1)=1.2.3\ldots a.$$

La relation fonctionnelle, prise comme définition, donne une signification à la fonction $\Gamma(a)$ lorsque l'argument est négatif. On a, par exemple,

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=-2\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{2}{3}\,\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{3}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right);$$

d'une façon générale, une valeur négative quelconque de l'argument se rattache au moyen de cette formule à une valeur positive, pour laquelle l'intégrale définie présente une signification.

Aux valeurs entières et négatives de a correspond de la sorte la valeur zéro, l'équation de définition de la fonction gamma s'applique quelque petit que soit a et donne

$$\Gamma(0) = \infty,$$

$\Gamma(-1)$, $\Gamma(-2)$, ..., $\Gamma(-p)$ sont donc aussi infinis, quel que soit le nombre entier p.

Remarquons toutefois que ce mode d'extension qui donne un sens au symbole Γ pour des valeurs où l'intégrale définie n'a pas de sens peut paraître arbitraire. Ce n'est que plus tard que nous verrons qu'il est nécessaire de faire cette généralisation et qu'il n'y a qu'un seul moyen de la faire.

La fonction Γ n'est pas la seule fonction satisfaisant à la relation trouvée. Considérons en effet une fonction définie par l'équation

$$F(a) = \Gamma(a)\varphi(a),$$

elle satisfait à la relation fonctionnelle si l'on a :

$$\varphi(a+1) = \varphi(a),$$

c'est-à-dire si $\varphi(a)$ admet une période égale à l'unité, et l'on sait qu'il y a une infinité de fonctions φ jouissant de cette propriété. On a

$$\begin{aligned}\varphi(a) = A_0 &+ A_1 \cos 2\pi a + A_2 \cos 4\pi a + \ldots \\ &+ B_1 \sin 2\pi a + B_2 \sin 4\pi a + \ldots,\end{aligned}$$

les coefficients A et B étant soumis à la seule restriction de rendre le développement convergent.

On a été conduit naturellement à se demander quelle était la signification de l'expression

$$1.2.3.\ \ldots\ a$$

lorsque a n'était pas un nombre entier. C'était sous une autre forme la question de l'interpolation de la série

$$1, 2, 6, 24, 120, \ldots,$$

mais cette forme nouvelle se prêtait à une généralisation immédiate, à l'examen de l'expression

$$a(a+d)(a+2d)\ldots[a+(n-1)d],$$

pour des valeurs quelconques de a, de d et de n.

De là l'emploi de symboles nombreux :

Vandermonde, *Mémoire sur les irrationnelles de différents ordres avec une application au cercle* (*Hist. de l'Ac. des Sc.*, 1772, p. 489...), pose

$$[p]^n = p(p-1)(p-2)\ldots(p-n+1).$$

Kramp, *Analyse des réfractions astronomiques et terrestres*, ch. III, écrit

$$a^{n/d} = a(a+d)(a+2d)\ldots[a+(n-1)d].$$

Crelle, *Mémoire sur la théorie des puissances...* (*J. de Cr.*, t. VII), emploie la notation

$$(a, +d)^n = a(a+d)(a+2d)\ldots[a+(n-1)d].$$

Outre ces travaux, nous devons citer aussi ceux de :

Bessel, *Ueber die Theorie der Zahlenfacultäten* (*Königsb. Arch. f. Naturw. und Math.*, I, p. 241; *Werke*, t. II, p. 342).

Eytelwein, *Grundlehren der höheren Analysis*, t. I, p. 551... t. II, p. 672...

Müller, *Beitrag zur Theorie der Facultäten* (*J. de Cr.*, t. XI, p. 361).

Oettinger, dans de nombreux mémoires insérés au *Journal de Crelle*, t. XXXIII, XXXV, XXXVIII et XLIV.

Ohm, *Ueber die Behandlung der Lehre der reellen Factoriellen und Facultäten, nach einer Methode der Einschliessung in Grenzen* (*J. de Cr.*, t. XXXIX, p. 23-41).

Raabe, *J. de Cr.*, t. XLIII, p. 283-292 et t. XLVIII, p. 130-136.

Mais on rencontrait dans cette théorie des difficultés de toutes sortes qui ne trouvèrent leur explication que lorsque Weierstrass eut montré dans un mémoire important (*J. de Cr.*, t. LI), la nature des conditions auxquelles satisfont les facultés analytiques et qui permettent de les définir complètement.

Nous aurons à revenir dans la suite sur ce qui doit être ajouté à la relation fonctionnelle pour déterminer la fonction gamma.

L'expression

$$1.2.3.\,..\;n,$$

où n est supposé entier, peut être représentée par $\Gamma(n+1)$; il y a cependant avantage dans ce cas à employer une notation particulière $n!$, qui se lit n faculté; Euler avait employé le signe Δ; en Angleterre, on se sert du symbole $\underline{|n}$.

On a, entre deux fonctions Γ dont les arguments ont une somme égale à l'unité, la relation

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

On trouve, en effet, directement

$$(3)\qquad \int_0^\infty e^{-(1+y)x}\,dx=\frac{1}{1+y};$$

en multipliant les deux membres par $y^{a-1}dy$ et en intégrant entre les limites zéro et infini, on en déduit

$$(4)\qquad \int_0^\infty y^{a-1}\,dy\int_0^\infty e^{-(1+y)x}\,dx=\int_0^\infty\frac{y^{a-1}\,dy}{1+y}.$$

Appliquons au premier membre la règle d'intégration sous le signe $\int$ et remarquons qu'en posant $xy=z$ on a

$$(5)\qquad \int_0^\infty e^{-xy}y^{a-1}\,dy=\int_0^\infty e^{-z}z^{a-1}\frac{dz}{x^a}=\frac{\Gamma(a)}{x^a};$$

il devient

$$\Gamma(a)\int_0^{\infty} e^{-x} x^{-a}\, dx = \Gamma(a)\Gamma(1-a),$$

et l'on a donc

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \int_0^{\infty} \frac{y^{a-1}\, dy}{1+y}. \tag{6}$$

Reste à évaluer l'intégrale du second membre. Posons

$$y = x^{2n}, \qquad a = \frac{2m+1}{2n}, \qquad m < n,$$

il vient

$$2n\int_0^{\infty} \frac{y^{a-1}\, dy}{1+y} = \int_0^{\infty} \frac{x^{2m}\, dx}{1+x^{2n}} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}\, dx}{1+x^{2m}}.$$

En décomposant la fonction $\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}$ en fractions de la forme $\frac{2A(x-a)+2Bl}{(x-a)^2+b^2}$, on sait que la valeur de l'intégrale est

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}\, dx}{1+x^{2n}} = 2\pi(B + B' + \ldots).$$

Or, le calcul donne

$$2B = \frac{1}{n}\sin\frac{(2m+1)(2k+1)\pi}{2n} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Si donc on fait, pour abréger, $\frac{(2m+1)\pi}{2n} = \alpha$, on aura

$$2(B + B' + \ldots) = \frac{1}{n}[\sin\alpha + \sin 3\alpha + \ldots + \sin(2n-1)\alpha].$$

La somme des sinus est la partie imaginaire de la somme de la progression

$$e^{\alpha i} + e^{3\alpha i} + \ldots + e^{(2n-1)\alpha i} = e^{\alpha i}\frac{e^{2n\alpha i}-1}{e^{2\alpha i}-1};$$

mais $2n\alpha = (2m+1)\pi$, donc $e^{2n\alpha i} = -1$ et la somme des exponentielles est égale à

$$\frac{-2e^{\alpha i}}{e^{2\alpha i}-1} = \frac{i}{\sin\alpha}.$$

Par suite,

$$2(B + B' + \ldots) = \frac{1}{n \sin \alpha};$$

donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}\,dx}{1 + x^{2n}} = \frac{\pi}{n} \frac{1}{\sin \frac{2m+1}{2n} \pi},$$

et en substituant

$$(7) \qquad \int_0^{\infty} \frac{y^{a-1}}{1+y}\,dy = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

On peut toujours, en faisant varier m et n, faire converger $\frac{2m+1}{2n}$ vers un nombre quelconque compris entre 0 et $+1$. On aura donc la formule

$$(8) \qquad \Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi},$$

a étant un nombre quelconque compris entre zéro et un.

Cette relation constitue la seconde propriété de la fonction gamma, nous l'appellerons *relation des compléments*.

On est revenu à maintes reprises sur la démonstration de cette relation et sur l'expression de l'intégrale (7).

Euler, *Calc. int.*, t. I, p. 252.
— — t. IV, p. 106, p. 269.
Legendre, *Exercices...*, t. I, p. 224; t. II, p. 8.
Poisson, *J. Ec. Pol.*, t. XIX, p. 404.
Cauchy, *Mém. sav. étr.*, 1827, p. 599.
— *Mém. sur les int. déf. lim. imag.* Add. 12.
— *J. Ec. Pol.*, t. XXVIII, p. 147.
Bonnet, *J. de Liou.*, t. VI, p. 238.
Lejeune-Dirichlet, *J. de Cr.*, t. XV, p. 258.
Fürgensen, *J. de Cr.*, t. XXIII, p. 142.
Oettinger, *J. de Cr.*, t. XXXV p. 13.
— — t. XXXVIII, p. 162.
Winckler, *J. de Cr.*, t. XLV, p. 102.

Grunert, *Gr. Arch* , t. II, p. 266.
Schlömilch, *Gr. Arch.*, t. III, p. 278.
Serret, *J. de Liou.*, t. VIII, p. 1.
Greatheed, *Cambr. J.*, t. I, p. 17.
Dedekind, *J. de Cr.*, t. XLV, p. 70.
Enneper, *Schlöm. Z.*, t. XVIII, p. 411.

D'autres démonstrations s'appuient non plus sur la détermination d'une intégrale définie, mais sur la décomposition du sinus en un produit infini de facteurs. C'est ainsi que nous rencontrerons plus tard une démonstration de Gauss reposant sur l'expression de $\Gamma(a)$ par la limite d'un produit infini, ou encore une démonstration basée sur l'expression de la même fonction en un produit de facteurs primaires donnée par Weierstrass.

Si dans la formule

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi},$$

on fait $a = \frac{1}{2}$, on a

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}} = \pi,$$

et par conséquent

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \tag{9}$$

La démonstration directe est facile; on a, par définition,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-x} x^{-\frac{1}{2}} dx.$$

Posons $x = y^2$, l'intégrale deviendra

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-y^2} dy. \tag{10}$$

Cette intégrale se trouve facilement; considérons la surface de

révolution engendrée par la courbe $z = e^{-x^2}$ tournant autour de $0z$, on a pour le volume compris à l'intérieur du cylindre d'axe $0z$ et de rayon l

$$V = \int_0^l 2\pi e^{-x^2} x\,dx = \pi(1 - e^{-l^2});$$

quand l augmente indéfiniment, on a $V = \pi$, et, pour la seule portion comprise à l'intérieur du premier angle des coordonnées, V est en général égal à $\frac{\pi}{4}(1 - e^{-l^2})$ et a pour limite $\frac{\pi}{4}$. On peut évaluer autrement le volume en prenant pour base un carré de côtés $0x$ et $0y$; on a alors

$$V = \int_0^l dy \int_0^l e^{-(x^2+y^2)} dx = \int_0^l dy\, e^{-y^2} \int_0^l dx\, e^{-x^2} = H_l^2;$$

or ce volume est compris entre ceux correspondant aux cylindres de rayons l et $l\sqrt{2}$; on a donc

$$\frac{\pi}{4}(1 - e^{-l^2}) < H_l^2 < \frac{\pi}{4}(1 - e^{-2l^2}).$$

Lorsque l augmente indéfiniment, H_l a pour limite $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, les deux termes extrêmes ont même limite $\frac{\pi^2}{4}$; on retrouve donc bien la formule

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Les lettres d'Euler et de Daniel Bernoulli à Goldbach montrent qu'Euler était déjà arrivé à cette formule en 1729. Il la publia dans les *Anc. Mém. de Pétersb.*, t. V, p. 44; puis dans plusieurs autres mémoires : *Novi Comm. Petrop.*, t. XVI, § 28; *Calc. int.*, t. IV, p. 95...

La même formule s'est présentée dans bien des recherches :

Laplace, *Mém. de l'Ac.*, 1778, p. 227.

— — 1782, I, § 4.

— *Mém. Inst.*, 1809, p. 359.

— *Probabilités*, livre I, 24.

Legendre, *Exercices*, t. I, p. 281, p. 301.
Fourier, *Chaleur*, p. 360.
Kramp, *Réfract.*
Bidone, *Mém. Turin*, 1812, p. 231.
Binet, *J. Ec. Pol.*, t. XXVII, p. 123.
Oettinger, *J. de Cr.*, t. XXXV, p. 13.
Roberts, *J. de Liou.*, t. XVI, p. 1.
Grunert, *Gr. Arch.*, t. II, p. 266.

La formule (9) n'est qu'un cas particulier de la formule

$$\int_0^\infty e^{-p^2x^2}\,dx = \frac{1}{2p}\sqrt{\pi},$$

donnée par Bidone, *Mém. Turin*, 1812, p. 231.
Cisa de Grésy, *Mém. Turin*, 1821, p. 209.
Boncompagni, *J. de Cr.*, t. XXV, p. 74.
Winckler, *J. de Cr.*, t. XLV, p. 102.
Schlömilch, *Gr. Arch.*, t. V, p. 90.
— *Studien*, t. 1, p. 12.

La formule (10) est comprise dans la formule plus générale

$$\Gamma\left(\frac{1}{p}\right) = p\int_0^\infty e^{-x^p}\,dx$$

de Legendre, *Exercices*, t. I, p. 301, et Oettinger, *J. de Cr.*, t. XXXV, p. 13, ou aussi dans la formule

$$\frac{1}{2b}\Gamma\left(\frac{1}{2b}\right) = \int_0^\infty e^{-\left(x-\frac{p}{x}\right)^{2b}},$$

donnée par Boole, *J. de Liou.*, t. XIII, p. 113.

On peut donner à la relation aux compléments une autre forme. Telle qu'elle a été écrite, elle permet d'exprimer les fonctions gamma dont l'argument est compris entre zéro et $\frac{1}{2}$ en fonction de celles où l'argument varie de $\frac{1}{2}$ à 1. La relation fonctionnelle permet de la rendre applicable aux arguments compris entre deux

nombres entiers consécutifs quelconques. On a, par exemple,

$$\Gamma(1+a)\Gamma(1-a) = \frac{a(1-a)\pi}{\sin a\pi}.$$

On obtient une forme plus élégante en comptant les arguments à partir du milieu de la période; on a alors

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-a\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+a\right) = \frac{\pi}{\cos a\pi},$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}-a\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}+a\right) = \left(\frac{1}{4}-a^2\right)\frac{\pi}{\cos a\pi},$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}-a\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}+a\right) = \left(\frac{1}{4}-a^2\right)\left(\frac{9}{4}-a^2\right)\frac{\pi}{\cos a\pi}\cdots;$$

on a de même

$$\Gamma(1+a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi a}{\sin a\pi},$$

$$\Gamma(2+a)\Gamma(2-a) = \frac{\pi a(1-a^2)}{\sin a\pi},$$

$$\Gamma(3+a)\Gamma(3-a) = \frac{\pi a(1-a^2)(4-a^2)}{\sin a\pi}\cdots$$

Mais ce ne sont que des transformations de la relation aux compléments obtenues en tenant compte de la relation fonctionnelle. Ce ne sont pas de nouvelles formules.

La relation aux compléments permet de calculer la valeur de l'expression

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right),$$

quel que soit l'entier n. Si l'on renverse en effet l'ordre des facteurs et qu'on multiplie le résultat ainsi obtenu par l'expression proposée, on obtiendra son carré sous la forme

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{n-1}{n}\right),$$

c'est-à-dire

$$\frac{\pi^{n-1}}{\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}}.$$

Pour calculer cette expression, écrivons l'identité

$$\frac{1-x^{2n}}{1-x^2}=\left(1-2x\cos\frac{2\pi}{2n}+x^2\right)\left(1-2x\cos\frac{4\pi}{2n}+x^2\right)\cdots$$
$$\cdots\left(1-2x\cos\frac{(2n-2)\pi}{2n}\right);$$

en y faisant successivement $x=1$ et $x=-1$ et remplaçant le premier membre par sa vraie valeur n, on trouve

$$n=\left(2\sin\frac{\pi}{2n}\right)^2\left(2\sin\frac{2\pi}{2n}\right)^2\cdots\left(2\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)^2,$$
$$n=\left(2\cos\frac{\pi}{2n}\right)^2\left(2\cos\frac{2\pi}{2n}\right)^2\cdots\left(2\cos\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)^2,$$

et, en multipliant ces deux équations membre à membre, et extrayant la racine carrée,

$$n=2^{n-1}\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}.$$

On trouve donc par substitution

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}n^{-\frac{1}{2}}.$$

Cette propriété a été donnée par Euler à différentes reprises. Voir par exemple *Bulletin de Darboux,* t. IV$_2$, 1^e p., p. 209-256. Voir aussi Legendre, *Exercices*, t. II, p. 22.

Considérons l'intégrale

$$(11)\qquad 2\int_0^\infty e^{-\left(\alpha^2+\frac{k^2}{\alpha^2}\right)}d\alpha,$$

ou plutôt, en posant $\alpha=\sqrt{\alpha_1}$, l'intégrale

$$(12)\qquad u=\int_0^\infty e^{-\left(\alpha_1+\frac{k^2}{\alpha_1}\right)}\alpha_1^{\frac{1}{2}-1}d\alpha_1;$$

on peut l'évaluer de la façon suivante. On a

$$\frac{du}{dk} = -2k\int_0^\infty e^{-\left(\alpha_1+\frac{k^2}{\alpha_1}\right)}\alpha_1^{\frac{1}{2}-1}\frac{d\alpha_1}{\alpha_1},$$

ou bien, en posant

$$\alpha_1 = \frac{k^2}{\alpha_2},$$

$$\frac{du}{dk} = -2\int_0^\infty e^{-\left(\alpha_2+\frac{k^2}{\alpha_2}\right)}\alpha_2^{\frac{1}{2}-1}d\alpha_2 = -2u.$$

On a donc

$$\frac{du}{u} = -2dk, \qquad u = ce^{-2k};$$

la constante c se détermine en faisant $k=0$ dans (1) ou (2), on trouve ainsi

$$c = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

et on a la formule

$$(13)\qquad \int_0^\infty e^{-\left(\alpha_1+\frac{k^2}{\alpha_1}\right)}\alpha_1^{\frac{1}{2}-1}d\alpha_1 = \sqrt{\pi}\,e^{-2k}.$$

Multiplions les deux membres de l'équation (13) par $k^{\mu-1}dk$ et intégrons de $k=0$ à $k=\infty$, on a

$$(14)\qquad \int_0^\infty k^{\mu-1}dk\int_0^\infty e^{-\left(\alpha_2+\frac{k^2}{\alpha_2}\right)}\alpha_2^{\frac{1}{2}-1}d\alpha_2 = \sqrt{\pi}\int_0^\infty e^{-2k}k^{\mu-1}dk.$$

Le premier membre devient, en changeant l'ordre des intégrations,

$$\int_0^\infty e^{-\alpha_2}\alpha_2^{\frac{1}{2}-1}d\alpha_2\int_0^\infty e^{-\frac{k^2}{\alpha_2}}k^{\mu-1}dk,$$

et en posant $\frac{k^2}{\alpha_2}=\beta$, la seconde intégrale devient

$$\frac{1}{2}\alpha_2^{\frac{\mu}{2}}\int_0^\infty e^{-\beta}\beta^{\frac{\mu}{2}-1}d\beta = \frac{1}{2}\alpha_2^{\frac{\mu}{2}}\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right),$$

et par substitution, on trouve pour l'expression considérée

$$\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}\right).$$

D'autre part, on a

$$\int_0^\infty e^{-2k}k^{\mu-1}dk = \frac{\Gamma(\mu)}{2\mu};$$

on arrive donc à la relation

$$(15)\qquad \Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}\right) = 2^{1-\mu}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\mu),$$

que l'on peut aussi écrire

$$(16)\qquad \Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}\right) = 2^{\frac{1}{2}-\mu}(2\pi)^{\frac{2-1}{2}}\Gamma(\mu).$$

Cette relation entre les fonctions gamma n'est qu'un cas particulier d'une formule générale que l'on peut obtenir précisément par une généralisation du procédé que nous venons d'employer. Considérons l'intégrale multiple

$$(17)\qquad u = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty e^{-\left(\alpha_1+\alpha_2 \ldots +\alpha_{n-1}+\frac{k^n}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}}\right)}\alpha_1^{\frac{1}{n}-1}\alpha_2^{\frac{2}{n}-1}\cdots$$
$$\cdots\alpha_{n-1}^{\frac{n-1}{n}-1}d\alpha_1\,d\alpha_2\ldots d\alpha_{n-1};$$

on peut l'évaluer de la façon suivante. On a

$$\frac{du}{dk} = -nk^{n-1}\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty e^{-\left(\alpha_1+\alpha_2 \ldots +\alpha_{n-1}+\frac{k^n}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}}\right)}\alpha_1^{\frac{1}{n}-1}\alpha_2^{\frac{2}{n}-1}\cdots$$
$$\cdots\alpha_{n-1}^{\frac{n-1}{n}-1}\frac{d\alpha_1\,d\alpha_2\ldots d\alpha_{n-1}}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}},$$

ou bien, en posant

$$\alpha_1 = \frac{k^n}{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n},$$

$$\frac{du}{dk} = -n\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty e^{-\left(\alpha_2+\ldots+\alpha_n+\frac{k^n}{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n}\right)}\alpha_2^{\frac{1}{n}-1}\alpha_3^{\frac{2}{n}-1}\cdots$$
$$\cdots\alpha_n^{\frac{n-1}{n}-1}d\alpha_2\,d\alpha_3\ldots d\alpha_n,$$

$$\frac{du}{dk} = -nu.$$

On a donc

$$\frac{du}{u} = -n\,dk, \qquad u = ce^{-nk};$$

la constante c se détermine en faisant $k = 0$ dans (17), on trouve ainsi

$$c = \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\dots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{-\frac{1}{2}},$$

et on a la formule

$$(18) \quad \int_0^\infty \dots \int_0^\infty e^{-\left(\alpha_1+\dots+\alpha_{n-1}+\frac{k^n}{\alpha_1\dots\alpha_{n-1}}\right)} \alpha_1^{\frac{1}{n}-1} \dots \alpha_{n-1}^{\frac{n-1}{n}-1} d\alpha_1 \dots d\alpha_{n-1}$$
$$= (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{-\frac{1}{2}} e^{-nk}.$$

Multiplions les deux membres de l'équation (18) par $k^{\mu-1}\,dk$, et intégrons de $k = 0$ à $k = \infty$; le premier membre devient, en changeant l'ordre des intégrations,

$$\int_0^\infty \dots \int_0^\infty e^{-(\alpha_1+\dots+\alpha_{n-1})} \alpha_1^{\frac{1}{n}-1} \dots \alpha_{n-1}^{\frac{n-1}{n}-1} d\alpha_1 \dots d\alpha_{n-1} \int_0^\infty e^{-\frac{k^n}{\alpha_1\dots\alpha_{n-1}}} k^{\mu-1}\,dk,$$

et, en posant, $\dfrac{k^n}{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}} = \beta$, la dernière intégrale est égale à

$$\frac{1}{n}(\alpha_1 \dots \alpha_{n-1})^{\frac{\mu}{n}} \int_0^\infty e^{-\beta} \beta^{\frac{\mu}{n}} d\beta = \frac{1}{n}(\alpha_1 \dots \alpha_{n-1})^{\frac{\mu}{n}-1} \Gamma\left(\frac{\mu}{n}\right),$$

et, par substitution, on trouve pour l'expression considérée

$$\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{\mu}{n}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+1}{n}\right)\dots\Gamma\left(\frac{\mu+n-1}{n}\right).$$

D'autre part, on a dans le second membre l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-nk} k^{\mu-1}\,dk = \frac{1}{n^\mu}\Gamma(\mu),$$

et on arrive enfin à la relation

$$(19) \quad \Gamma\left(\frac{\mu}{n}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+1}{n}\right)\dots\Gamma\left(\frac{\mu+n-1}{n}\right) = n^{\frac{1}{2}-\mu}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\Gamma(\mu).$$

La relation (15) correspondait au cas particulier de $n = 2$. On peut écrire la relation générale sous une autre forme; posons $\frac{\mu}{n} = a$, et elle devient

$$(20) \quad \Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\dots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{1}{2}} n^{-na}\Gamma(na),$$

forme sous laquelle elle est le plus souvent employée.

L'intégrale (11) se rencontre souvent; nous citerons :

Laplace, *Nouv. Bull. Soc. Philom.*, N. 43.
— *Probabilités*, livre I, 26.
Poisson, *Nouv. Bull. Soc. Philom.*, N. 50.
— *J. Ec. Pol.*, t. XVI, p. 215.
Bidone, *Mém. Turin.*, 1812, p. 231.
Cisa de Grésy, *Mém. Turin.*, 1821, p, 209.
Cauchy, *Mém. Sav. Etr.*, 1827, p. 124.
Von Schmidten, *J. de Cr.*, t. V, p. 388.
Kummer, *J. de Cr.*, t. XVII, p. 228.
Boole, *J. de Liou.*, t. XIII, p. 111.
Bonnet, *J. de Liou.*, t. XIV, p. 249.
Helmling, *Transf. best. Integr.*, p. 27.

L'emploi de cette intégrale pour la démonstration des formules (15) et (19) est dû à Liouville : *Détermination d'une classe remarquable d'intégrales définies multiples et démonstration nouvelle d'une célèbre formule de Gauss concernant les fonctions gamma de Legendre*. (*J. de Liou.*, t. I_1, p. 82-88, et C. R., t. XLII, p. 501.) La formule (15) avait été établie tout d'abord par Legendre (*Exerc.*, t. I, p. 284); Poisson, *J. Ec. Pol.*, t. IX, p. 146, arrive à une équation entre deux intégrales Eulériennes qui lui paraissait contenir une nouvelle relation utile dans la réduction de ces transcendantes; Legendre a montré (*Exerc.*, t. II, p. 119) que cette équation revenait à la formule (15).

Liouville a retrouvé une démonstration indirecte de la même formule : *Démonstration nouvelle d'une formule de M. William Thomson*. (*J. de Liou.*, t. I_1, p. 445-450.)

La formule générale (20) a été établie par Gauss, *Disquisitiones generales circa seriem infinitam* $1 + \frac{\alpha\beta}{1\gamma} x + \ldots$ (*Comment. Soc. R. Sc. Götting.*, t. II, 1813. — *Werke*, t. III, p. 149). Voir § 6.

Legendre démontra cette formule au moyen du développement en séries des dérivées successives de $l\Gamma\,(1+x)$ (*Exerc.*, t. II, p. 16...).

Nous aurons à revenir sur la démonstration de la *relation de Gauss* due à Cauchy et basée sur l'évaluation approchée de la fonction gamma et aussi sur celle reposant sur l'expression de cette fonction sous forme de produit infini.

N. Sonine, dans une *Note sur une formule de Gauss* (*Bull. S. M. F.*, t. IX, p. 162-166) a établi la relation de Gauss en partant de la relation $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$, en ayant recours seulement à des considérations fonctionnelles et sans employer le calcul intégral.

Une démonstration reposant sur une expression particulière de $l\Gamma\,(a)$ a été donnée par Gilbert : *Recherches sur le développement de la fonction gamma.* (*Mém. Acad. Sc. de Belgique*, t. XLI, p. 55, § 29.)

Dans le *Journal de Crelle*, t. XV, p. 258, Lejeune Dirichlet donna une démonstration fondée non plus sur la considération des produits infinis ou des séries, mais sur celle des intégrales définies.

Nous aurons l'occasion de revenir plus tard à différentes occasions sur la démonstration de cette formule; nous devons cependant encore ici citer la démonstration de Stern (*J. de Cr.*, t. XXI, p. 377) basée sur la représentation par une intégrale définie de la différence

$$\frac{dl\Gamma(a)}{da} - \frac{dl\Gamma(b)}{db}.$$

Dans ses *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, t. II, p. 390, Cauchy est revenu sur la question qui nous occupe et s'est inquiété d'une façon plus générale de la recherche des équations linéaires qui vérifient les valeurs diverses $l\Gamma\,(a)$.

§ **3.** La formule

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a) \tag{1}$$

montre que pour calculer la fonction gamma pour toutes les valeurs de l'argument, il suffit de la connaître pour toutes les valeurs de cet argument comprises dans un intervalle égal à l'unité, par exemple entre 0 et 1 ou bien entre 1 et 2 ....

La relation des compléments

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi} \tag{2}$$

permettra d'ailleurs de restreindre encore cet intervalle; si la période prise comme période fondamentale correspond aux valeurs de l'argument comprises entre zéro et un, l'application directe de la formule (2) donnera $\Gamma\ (a)$ pour toutes les valeurs comprises entre $\frac{1}{2}$ et 1 quand on connaîtra la même fonction pour celles comprises entre zéro et $\frac{1}{2}$. La relation de Gauss donne lieu à une réduction encore plus considérable de l'intervalle dans lequel il est nécessaire de calculer $\Gamma\ (a)$.

Prenons d'abord le cas de $n = 2$:

$$\Gamma(a)\Gamma\left(\frac{1}{2}+a\right) = \frac{2\sqrt{\pi}}{2^{2a}}\Gamma(2a); \tag{3}$$

nous allons voir qu'il suffit de connaître $\Gamma\ (a)$ depuis $a = 0$ jusqu'à $a = \frac{1}{4}$ pour pouvoir déterminer cette fonction dans tout le reste de la première période, depuis $x = \frac{1}{4}$ jusqu'à 1.

Désignons pour abréger les notations $l\Gamma\ (a)$ par (a), les équations (2) et (3) peuvent s'écrire

$$(a) + (1-a) = l\,\frac{\pi}{\sin a\pi},$$

$$(a) + \left(\frac{1}{2}+a\right) - (2a) = \frac{1}{2}\,l2\pi + \frac{1}{2}\,l2 - 2a\,l2;$$

les seconds membres étant connus lorsque a est donné, nous les

désignerons par la lettre d qui désignera également toute quantité composée de termes connus. On peut alors écrire les équations précédentes sous la forme

$$(a) + (1 - a) = d; \tag{4}$$

$$(a) + \left(\frac{1}{2} + a\right) - (2a) = d. \tag{5}$$

Si dans l'équation (5) on fait $a = \frac{1}{4} + x$, on aura

$$\left(\frac{1}{4} + x\right) + \left(\frac{3}{4} + x\right) - \left(\frac{1}{2} + 2x\right) = d; \tag{6}$$

mais les équations (4) et (5) donnent

$$\left(\frac{3}{4} + x\right) = -\left(\frac{1}{4} - x\right) + d,$$
$$\left(\frac{1}{2} + 2x\right) = (4x) - (2x) + d;$$

on obtient donc, en substituant dans l'équation (6),

$$\left(\frac{1}{4} + x\right) = \left(\frac{1}{4} - x\right) + (4x) - (2x) + d.$$

Tant que x est plus petit que $\frac{1}{12}$, cette équation détermine (a) ou $\left(\frac{1}{4} + x\right)$ par d'autres fonctions où a est plus petit que $\frac{1}{4}$. En donnant à x toutes les valeurs depuis $x = 0$ jusqu'à $= \frac{1}{12}$, on connaîtra (a) depuis $a = \frac{1}{4}$ jusqu'à $a = \frac{1}{3}$.

Pour le cas particulier où $a = \frac{1}{3}$ ou $x = \frac{1}{12}$, les équations (4) et (5) donnent immédiatement

$$\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right) = d,$$
$$\left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{2}{3}\right) - \frac{1}{3} = d,$$

d'où l'on tire

$$\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)+d.$$

Reste à déterminer (a) depuis $a=\frac{1}{3}$ jusqu'à $a=\frac{1}{2}$, or les équations (4) et (5) donnent

$$\left(\frac{1}{2}-x\right)=(x)-(2x)+d,$$

et si l'on donne à x toutes les valeurs depuis $x=0$ jusqu'à $x=\frac{1}{6}$, le second membre est connu, et l'on trouve la valeur de la fonction (a) depuis $a=\frac{1}{3}$ jusqu'à $a=\frac{1}{2}$.

Les solutions effectives sont données par la suite des trois équations

$$\left(\frac{1}{4}+x\right)=\left(\frac{1}{4}-x\right)-(2x)+(4x)+\left(\frac{1}{2}+2x\right)l2+l\sin\left(\frac{1}{4}-x\right)\pi,$$

$$2\left(\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{2}l\pi-\frac{2}{3}l2-l\sin\frac{\pi}{3},$$

$$\left(\frac{1}{2}-x\right)=(x)-(2x)+\frac{1}{2}l\pi-(1-2x)l2-l\cos\pi x.$$

On est dès lors conduit à penser que l'emploi de la relation de Gauss où l'on fera successivement $n=3, 5, 7, 11$ ... peut conduire à une réduction plus grande de l'espace où il faut connaître la fonction gamma.

C'est en effet ce qui a lieu. La relation obtenue en faisant $n=3$ permet de réduire cet intervalle à $\frac{1}{6}$; il suffit alors de connaître (a) de $a=0$ jusqu'à $a=\frac{1}{18}$ et de $a=\frac{5}{18}$ jusqu'à $a=\frac{7}{18}$, ces deux parties réunies faisant un somme égale à $\frac{1}{6}$. Les relations de Gauss pour des valeurs premières de n et supérieures à 3 montreraient qu'il suffit de connaître la fonction $\Gamma\ (a)$ pour un ou plusieurs intervalles aussi petits que l'on

voudra afin de pouvoir en déduire sa valeur pour des valeurs réelles quelconques de a, nous ne nous arrêterons cependant pas sur la proportion de cette réduction et sur la distribution des parties qui exigent la connaissance de la fonction dans le plus petit intervalle.

Legendre, à qui l'on doit, comme nous l'avons déjà dit, la relation (3), l'employa à la réduction de l'intervalle où il faut connaître la fonction gamma (*Exerc.* t. I, partie II, § 61). Il est revenu, dans ses *Exercices* (t. II, partie IV, p. 26 ...), sur cette question et a donné alors le procédé de réduction que nous venons d'exposer en même temps que sa généralisation au moyen des relations de Gauss pour les valeurs de n supérieures à 2. Il établit les formules de réduction correspondant au cas de $n = 3$.

Hoppe, *J. de Cr.*. t. XL, p. 152, s'occupa également de la détermination de l'intervalle fondamental dans lequel il est nécessaire de calculer directement la fonction gamma; mais les résultats auxquels il arrive ne présentent point encore la généralité que l'on pourrait souhaiter.

§ **4.** Nous avons trouvé précédemment une formule entre les fonctions gamma dont les arguments sont $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}$ n étant un nombre entier, et cette formule résultait de l'emploi de la relation des compléments : nous sommes conduits maintenant à nous demander quel est le nombre minimum de transcendantes contenues dans la suite $\Gamma\left(\frac{1}{n}\right), \Gamma\left(\frac{2}{n}\right), \ldots, \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)$ non réductibles l'une à l'autre. Si n est un nombre premier, nous ne pouvons faire usage que de la relation $\Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}$ et les transcendantes ne peuvent être réduites à un nombre moindre que $\frac{1}{2}(n-1)$. Mais si n est un nombre composé, chaque facteur donnera lieu à l'application de la relation de Gauss relative à ce facteur.

Si n est divisible par 2, on appliquera la formule

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)=\Gamma(2a)\,(2\pi)^{\frac{1}{2}}\,2^{\frac{1}{2}-2a},$$

où l'on fera successivement $a=\frac{1}{n}$, $a=\frac{2}{n}$, ... jusqu'à $a=\frac{1}{4}$; il est inutile de donner à a des valeurs supérieures de la forme $\frac{p}{n}$ qui ne donneraient point, d'après ce qui a déjà été dit, de relations nouvelles. On obtient ainsi des formules de réduction.

Si n est divisible par 3, on appliquera la formule

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(a+\frac{2}{3}\right)=\Gamma(3a)\,(2\pi)\,3^{\frac{1}{2}-3a},$$

où l'on fera successivement $a=\frac{1}{n}$, $a=\frac{2}{n}$, ..., jusqu'à $a=\frac{1}{6}$; on aura de la sorte de nouvelles formules de réduction.

Et ainsi de suite.

Soit, par exemple, $n=12$, nous désignerons pour abréger $l\Gamma\left(\frac{k}{12}\right)$ par (k), on aura à appliquer les formules

(1) $$(a)+(1-a=l\frac{\pi}{\sin a\pi},$$

(2) $$(a)+\left(\frac{1}{2}+a\right)-(2a)=d,$$

(3) $$(a)+\left(\frac{1}{3}+a\right)+\left(\frac{2}{3}+a\right)-(3a)=d.$$

L'équation (1) permet immédiatement d'exprimer (7), (8), (9), (10) et (11) au moyen de (1), (2), (3), (4), (5); on a donc seulement à s'occuper de ces deux dernières quantités puisque (6) est connu et est égal à $\sqrt{\pi}$.

L'équation (2), en y faisant successivement $a=\frac{1}{12}$ et $a=\frac{2}{12}$ donne

$$(1)+(7)-(2)=\frac{1}{2}l\pi+\frac{5}{6}l2,$$

$$(2)+(8)-(4)=\frac{1}{2}l\pi+\frac{4}{6}l2;$$

mais on a, en posant $\frac{\pi}{12} = \omega$,

$$(5) + (7) + l\frac{\pi}{\sin 5\omega} = l\pi + 2l2 + l\sin\omega,$$

$$(4) + (8) = l\frac{\pi}{\sin 4\omega} = l\pi + l2 - \frac{1}{2}l3;$$

et il vient

$$(5) = (1) - (2) + \frac{1}{2}l\pi + \frac{7}{6}l2 + l\sin\omega,$$

$$(4) = \frac{1}{2}(2) + \frac{1}{4}l\pi + \frac{1}{6}l2 - \frac{1}{4}l3.$$

L'application de la troisième relation conduira à une nouvelle réduction : en y faisant $a = \frac{1}{12}$, on obtient l'équation

$$(1) + (5) + (9) - (3) = l2\pi + \frac{1}{4}l3;$$

mais on a

$$(3) + (9) = l\frac{\pi}{\sin 3\omega} = l\pi + \frac{1}{2}l2;$$

remplaçant alors (9) en fonction de (3) et (5) par la fonction de (1) et (2) trouvée précédemment, il vient

$$(3) = (1) - \frac{1}{2}(2) + \frac{1}{4}l\pi + \frac{1}{3}l2 - \frac{1}{8}l3 + \frac{1}{2}l\sin\omega.$$

Donc (1) et (2) suffisent pour déterminer toutes les autres transcendantes.

On pourrait également exprimer les différentes transcendantes au moyen de (3) et de (4), c'est-à-dire de $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$ et $\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$, ce qui peut paraître plus naturel.

Considérons maintenant le cas de $n = 24$. Nous désignerons par (k) la quantité $l\Gamma\left(\frac{k}{24}\right)$. Les résultats trouvés dans le cas de $n = 12$ donnent ici des réductions entre les fonctions (2), (4),

(6), (8), (10); on a, en désignant par d une quantité déterminée,

$$(6) = (2) - \frac{1}{2}(4) + d.$$

$$(8) = \frac{1}{2}(4) + d,$$

$$(10) = (2) - (4) + d.$$

L'existence du facteur 2 donne ensuite naissance aux relations

$$(1) + (13) - (2) = d,$$
$$(3) + (15) - (6) = d,$$
$$(5) + (17) - (10) = d,$$

qui deviennent, en tenant compte de la relation des compléments,

$$(11) = (1) - (2) + d,$$
$$(9) = (3) - (6) + d,$$
$$(7) = (5) - (10) + d.$$

L'existence du facteur 3 donne deux nouvelles relations qui deviennent, en tenant compte de la relation des compléments,

$$(1) + (9) - (7) - (3) = d,$$
$$(3) + (11) - (5) - (9) = d.$$

Ces deux formules se réduisent à une seule, en vertu des relations déjà trouvées,

$$(5) = (1) - (2) + (6) + d.$$

On voit donc qu'il est nécessaire de connaître seulement quatre transcendantes (1) et (3), (2) et (4) pour obtenir toutes les autres; l'expression de (6), (8), (10) a été donnée; on a pour (5), (7), (9) et (11) les formules

$$(5) = (1) - \frac{1}{2}(4) + d,$$

$$(7) = (1) - (2) + \frac{1}{2}(4) + d,$$

$$(9) = (3) - (2) + \frac{1}{2}(4) + d,$$

$$(11) = (1) - (2) + d.$$

Considérons encore le cas de $n = 60$ et posons $l\Gamma\left(\frac{k}{60}\right) = (k)$; les formules trouvées pour $n = 12$ donnent ici

$$(15) = (5) - \frac{1}{2}(10) + d,$$

$$(20) = \frac{1}{2}(10) + d,$$

$$(25) = (5) - (10) + d.$$

L'existence du facteur 2 donne pour k pair, en tenant compte de la relation des compléments,

$$\begin{aligned}
(28) &= (2) - (4) + d,\\
(26) &= (4) - (8) + d,\\
(24) &= (6) - (12) + d,\\
(22) &= (8) - (16) + d,\\
(18) &= (12) - (24) + d,\\
(16) &= (14) - (28) + d.
\end{aligned}$$

Le facteur (3) donne ensuite

$$\begin{aligned}
(2) + (22) - (18) - (6) &= d,\\
(4) + (24) - (16) - (12) &= d,\\
(6) + (26) - (14) - (18) &= d,\\
(8) + (28) - (12) - (24) &= d;
\end{aligned}$$

ces dix équations se réduisent à huit et permettent d'écrire

$$\begin{aligned}
(28) &= (2) - (4) + d,\\
(26) &= (2) - (6) + d,\\
(24) &= (6) - (12) + d,\\
(22) &= 2(12) - (2) + d,\\
(18) &= 2(12) - (6) + d,\\
(16) &= (4) + (6) - 2(12) + d,\\
(14) &= (2) + (6) - 2(12) + d,\\
(8) &= (6) + (4) - (2) + d.
\end{aligned}$$

On voit que (2), (4), (6) et (12) suffisent pour déterminer (k) lorsque k est pair et non divisible par 5.

Le facteur 5 donne maintenant naissance aux relations

$$(2)+(14)+(26)-(22)-(10)-(10)=d,$$
$$(4)+(16)+(28)-(20)-(8)\ \ -(20)=d,$$

qui se réduisent à une seule :

$$(12)=(2)-\frac{1}{2}(10)+d.$$

En substituant cette valeur de (12) dans les équations trouvées précédemment, on voit en somme que toutes les fonctions (k), où k est pair, s'expriment en fonction de (2), (4), (6), (10).

Si k est impair, le facteur 2 donne les relations

$$\begin{aligned}
(29)&=(1)\ \ -(2)\ \ +d,\\
(27)&=(3)\ \ -(6)\ \ +d,\\
(23)&=(7)\ \ -(14)+d,\\
(21)&=(9)\ \ -(18)+d,\\
(19)&=(11)-(22)+d,\\
(17)&=(13)-(26)+d.
\end{aligned}$$

Le facteur 3 fournit quatre relations qui se réduisent à deux seulement :

$$(11)=(1)+(9)-(2)-(3)+(6)+d,$$
$$(13)=(3)+(7)-(9)+2(2)-2(6)-(10)+d.$$

Le facteur 5 donne deux relations qui se réduisent à une seule :

$$(9)=(3)+(2)-(6)-\frac{1}{2}(10)+d.$$

On voit dès lors qu'en ajoutant aux termes (2), (4), (6), (10) les quatre autres (1), (3), (5), (7), on pourra achever de déterminer toutes les transcendantes (k). On trouve pour les valeurs impaires de k les expressions suivantes :

$$(9)\ \ =(3)+(2)-(6)-\frac{1}{2}(10)+d,$$

$$(11)=(1)-\frac{1}{2}(10)+d,$$

$$(13) = (7) + (2) - (6) - \frac{1}{2}(10) + d,$$

$$(15) = (5) - \frac{1}{2}(10) + d,$$

$$(17) = (7) - \frac{1}{2}(10) + d,$$

$$(19) = (1) - (2) + \frac{1}{2}(10) + d,$$

$$(21) = (3) - (2) + \frac{1}{2}(10) + d,$$

$$(23) = (7) + (2) - (6) - (10) + d,$$

$$(25) = (5) - (10) + d,$$

$$(27) = (3) - (6) + d,$$

$$(29) = (1) - (2) + d.$$

Désignons par N le nombre des transcendantes nécessaires pour déterminer toutes les autres, on aura

$$\text{pour } n = 12, \qquad N = 2 = \frac{12}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right),$$

$$\text{pour } n = 24, \qquad N = 4 = \frac{24}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right),$$

$$\text{pour } n = 60, \qquad N = 8 = \frac{60}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right);$$

on est donc porté à croire que si α, β, γ ... sont les nombres premiers inégaux qui divisent n, on aura

$$N = \frac{n}{2}\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\cdots,$$

c'est-à-dire que N est égal au nombre des nombres premiers à n et inférieur à $\frac{n}{2}$. Il y aura d'ailleurs dans chaque cas bien des manières de choisir les transcendantes au moyen desquelles s'expriment toutes les autres.

Legendre est revenu à plusieurs reprises, dans ses *Exercices*, sur la réduction au nombre le plus petit possible de transcen-

dantes $\Gamma\left(\frac{p}{n}\right)$. Il s'est également occupé de la nature des transcendantes fondamentales au moyen desquelles on peut exprimer toutes les autres, et a montré que dans le cas de $n = 12$ on avait affaire à des transcendantes elliptiques. Catalan s'est occupé de la même question (*Mém. de Belgique*, t. XLII). Toutes les formules établies précédemment sont dues à Legendre; nous nous y sommes arrêtés à cause du théorème par induction auquel elles conduisent.

Plana (*J. de Cr.*, t. XVII, p. 198) a donné d'autres exemples encore que ceux de Legendre et a essayé une démonstration du théorème général qui est loin d'être rigoureuse.

Le seul essai sérieux de démonstration que nous pouvons citer est celui de Stern. (*J. de Cr.*, t. LXVII, p. 114.)

§ **5.** Nous n'avons étudié jusqu'ici la fonction gamma que pour des valeurs réelles et positives de l'argument; nous allons nous occuper maintenant du cas où l'argument est quelconque.

L'intégrale définie

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{-x}\, dx$$

n'a de signification que pour les valeurs positives de a. Supposons maintenant l'argument imaginaire et de la forme $\alpha + i\beta$, on a alors

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{-x}\, dx = \int_0^\infty e^{lx(\alpha-1+i\beta)} e^{-x}\, dx$$
$$= \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} \cos lx^\beta\, dx + i \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} \sin lx^\beta\, dx,$$

où le logarithme portant sur la quantité positive x^β est pris dans le sens arithmétique. On reconnaît que les deux intégrales qui figurent dans le second membre n'ont de signification qu'en supposant $\alpha > 0$. Cette condition, qui est nécessaire, est d'ailleurs suffisante et nous voyons que la considération de l'intégrale

définie prise comme définition nous donne comme fonction gamma une fonction uniforme qui n'a d'existence que dans la moitié du plan située à droite de Oy.

On peut cependant conclure de cette définition de la fonction $\Gamma(a)$ dans une moitié seulement du plan l'existence d'une fonction analytique uniforme dans tout le plan et qui coïncide avec la première dans l'espace situé à droite de Oy.

Posons, en effet,

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x}\, dx = P(a) + Q(a),$$

en faisant

$$P(a) = \int_0^\omega x^{a-1} e^{-x}\, dx,$$

$$Q(a) = \int_\omega^\infty x^{a-1} e^{-x}\, dx.$$

ω étant une valeur quelconque positive. L'intégrale $Q(a)$ définit une fonction analytique de a dans toute l'étendue du plan, quelle que soit la valeur réelle ou imaginaire de a : nous avons vu en effet précédemment que c'était la circonstance de la limite zéro de l'intégrale $\int_0^\infty x^{a-1} e^{-x}\, dx$ qui oblige de supposer a positif, ou plus généralement la partie réelle de a positive. La fonction $Q(a)$ est donc finie, continue et uniforme dans tout le plan, c'est-à-dire une fonction holomorphe. Quant à la fonction $P(a)$, elle n'est donnée par l'intégrale $\int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx$ que dans la moitié du plan à droite de Oy; mais, remplaçant e^{-x} par son développement en série convergente

$$1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{3!} + \ldots,$$

on obtient immédiatement l'expression suivante :

$$P(a) = \frac{\omega^a}{a} - \frac{\omega^{a+1}}{a+1} + \frac{1}{1.2}\frac{\omega^{a+2}}{a+2} - \ldots.$$

Or la série obtenue ainsi en partant d'une intégrale définie est convergente, et même rapidement convergente pour toute valeur réelle ou imaginaire de a, les valeurs $0, -1, -2, -3, \ldots$ étant toutefois exceptées; elle définit par suite une fonction analytique uniforme. En distinguant par $P(a)$ ce développement en série, la formule

$$\Gamma(a) = P(a) + Q(a)$$

nous donne une définition générale de la fonction gamma valable pour une valeur quelconque de l'argument. $P(a)$ représente la partie fractionnaire ou méromorphe de $\Gamma(a)$ et met en évidence les pôles $a = 0, -1, -2, \ldots$

Si l'on fait en particulier $\omega = 1$, la partie méromorphe et la partie entière de $\Gamma(a)$ deviennent

$$P(a) = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} + \frac{1}{1.2}\frac{1}{a+2} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n!(a+n)} + \ldots,$$

$$Q(a) = \int_1^{\infty} x^{a-1} e^{-x}\, dx = c_0 + c_1 a + \ldots + c_n a^n + \ldots,$$

en posant

$$n!\, c_n = \int_1^{\infty} e^{-x} (lx)^n \frac{dx}{x}.$$

$P(a)$ met alors en évidence les valeurs des résidus en chaque pôle.

Nous venons de passer de la sorte d'une expression donnée par une intégrale définie dans une portion du plan, à une fonction analytique dans tout le plan. On doit naturellement se demander si une pareille extension n'est possible que d'une seule manière.

D'après un théorème de Riemann, si deux fonctions uniformes U et V qui ont un nombre quelconque fini ou infini de pôles ou points singuliers essentiels, coïncident le long d'un élément de grandeur définie, aussi petit que l'on veut, elles sont nécessairement identiques. Il n'y a donc pas d'autre fonction uniforme que la fonction $\Gamma(a)$ telle que nous venons de l'obtenir, qui puisse coïncider avec l'intégrale définie $\int_0^{\infty} e^{-x} x^{a-1} dx$, lorsque cette intégrale définit une fonction.

A la relation fonctionnelle entre les fonctions gamma correspondent des relations fonctionnelles entre les fonctions P et aussi entre les fonctions Q.

On a

$$P(a+1) = \frac{1}{a+1} - \frac{1}{a+2} + \frac{1}{1.2}\frac{1}{a+3} - \dots + \frac{(-1)^n}{n!\,(a+n+1)},$$

or, on peut écrire identiquement

$$\frac{(-1)^n}{n!\,(a+n+1)} = \frac{(-1)^{n+1}a}{(n+1)!\,(a+n+1)} + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!},$$

et on obtient, en substituant,

$$P(a+1) = aP(a) - \frac{1}{e}.$$

L'intégration par parties donne

$$Q(a+1) = aQ(a) + \frac{1}{e}.$$

En ajoutant membre à membre ces deux relations, on retrouve la formule

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a),$$

qui est maintenant démontrée pour toutes les valeurs de l'argument positives ou négatives, réelles ou imaginaires.

La formule

$$P(a+1) = aP(a) - \frac{1}{e},$$

où l'on donne à a les valeurs a, $a+1$, ... $a+n$, donne lieu aux formules suivantes :

$$eP(a) = \frac{e}{a}P(a+1) + \frac{1}{a},$$

$$eP(a+1) = \frac{e}{a+1}P(a+2) + \frac{1}{a+1},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$eP(a+n) = \frac{e}{a+n}P(a+n+1) + \frac{1}{a+n}.$$

Multiplions respectivement les deux membres de chacune de ces équations par $1, \frac{1}{a}, \ldots \frac{1}{a(a+1)\ldots(a+n-1)}$, et ajoutons membre à membre, il vient :

$$eP(a) = \frac{eP(a+n+1)}{a(a+1)\ldots(a+n)} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a(a+1)} + \ldots + \frac{1}{a(a+1)\ldots(a+n)}.$$

La formule qui définit $P(a)$ montre que $\lim P(a+n+1) = 0$ lorsque n augmente indéfiniment, nous trouvons donc pour $P(a)$ le développement

$$eP(a) = \frac{1}{a} + \frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{a(a+1)(a+2)} + \ldots,$$

la série étant prolongée indéfiniment.

On peut aussi donner de la fonction Q un développement remarquable. Reprenons la forme générale

$$Q(a) = \int_{\omega}^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$$

et posons

$$Q_n = \int_{\omega+n}^{\omega+n+1} x^{a-1} e^{-x} dx;$$

on a la série convergente

$$Q(a) = Q_0 + Q_1 + Q_2 + \ldots$$

Posons

$$x = \zeta + \omega + n,$$

et il vient

$$Q_n = \int_0^1 (\omega + n + \zeta)^{a-1} e^{-\omega-n-\zeta} d\zeta$$
$$= e^{-\omega-n} \int_0^1 (\omega + n + \zeta)^{a-1} e^{-\zeta} d\zeta,$$

ou bien

$$Q_n = e^{-\omega-n}\int_0^1\left[(\omega+n)^{a-1}+\frac{a-1}{1}(\omega+n)^{a-2}\zeta+\dots\right]e^{-\zeta}d\zeta$$

$$= e^{-\omega-n}\left[P(1)(\omega+n)^{a-1}+P(2)(\omega+n)^{a-2}\frac{a-1}{1}\right.$$

$$\left.+P(3)(\omega+n)^{a-3}\frac{(a-1)(a-2)}{1.2}+\dots\right].$$

Posons maintenant

$$S(a)=\frac{\omega^a}{e^\omega}+\frac{(\omega+1)^a}{e^{\omega+1}}+\frac{(\omega+2)^a}{e^{\omega+2}}+\dots,$$

et il vient

$$Q(a)=P(1)S(a-1)+\frac{a-1}{1}P(2)S(a-2)$$

$$+\frac{(a-1)(a-2)}{1.2}P(3)S(a-3)+\dots,$$

série convergente pour toutes les valeurs de a quand on suppose $\omega>1$.

En effet, à partir d'une certaine valeur de n on a approximativement

$$S(a-n)=\frac{\omega^{a-n}}{e^\omega},\qquad P(n)<\frac{1}{n};$$

donc à partir de cette valeur de n les termes de la série sont plus petits que ceux du développement de $e^{-\omega}(\omega+1)^{a-1}$.

$P(1)$, $P(2)$ ... se calculent au moyen de la relation $P(a+1)=aP(a)-\frac{1}{e}$; la seule difficulté consiste dans le calcul de la fonction $S(a)$.

On avait remarqué depuis longtemps que la définition de la fonction gamma au moyen d'une intégrale définie était insuffisante. On avait vu ce qu'il y avait d'arbitraire à employer la relation fonctionnelle pour donner dans le cas des arguments négatifs un sens à cette fonction. C'est cette considération qui engagea Gauss

à prendre pour la définir le produit infini que nous allons bientôt rencontrer à la place de l'intégrale définie (*Briefwechsel zwischen Gauss und Bessel*, p. 150 et suiv.).

Il était cependant intéressant de voir comment on pouvait, par une extension convenable de l'intégrale définie, arriver à la notion d'une fonction définitive dans tout le plan. Liouville avait remarqué que la définition de Legendre s'appliquait aux arguments à partie réelle positive. (*C. R.*, t. XXXV, p. 321.) Newman (*Camb. and Dublin Mathem.*, J., t., p. 57) s'était occupé de la détermination de $\Gamma(a)$, en particulier pour des valeurs négatives de a; il était arrivé à un résultat important, retrouvé depuis par Schlömilch, en partant de la décomposition de $\frac{1}{\Gamma(a)}$ en facteurs primaires donnée par Weierstrass (V. § 16).

En ce qui concerne l'étude directe de la fonction Γ comme intégrale définie, nous devons remarquer que déjà Euler, dans son *Calcul intégral* (t. IV, p. 323, 325), avait montré l'importance pour le développement en série de l'intégrale Eulérienne de première espèce de la décomposition en deux parties de l'intégrale définie qui représente cette fonction. Legendre (*Exerc.*, t. I, p. 239...) fut conduit à considérer les fonctions que nous avons appelées $P(a)$ et $Q(a)$. Il étudie en effet l'intégrale définie

$$\Gamma(a,x) = \int_0^x dx \left(l\,\frac{1}{x}\right)^{a-1}$$

et, en posant $z = \left(l\,\frac{1}{x}\right)$, il donne le développement

$$\Gamma(a,x) = \Gamma(a) - z^a\left(\frac{1}{a} - \frac{z}{a+1} + \frac{1}{1.2}\,\frac{z^2}{a+2} - \ldots\right),$$

qui permet de calculer facilement la fonction $\Gamma(a,x)$ lorsque z est très petit, c'est-à-dire lorsque x est voisin de l'unité. Mais lorsque x est très petit, Legendre remarque qu'il faudra prolonger trop loin la suite pour obtenir une approximation déterminée. Il donne pour ce cas la suite suivante, plus simple à employer que

la précédente, malgré sa divergence :

$$\Gamma(a,x) = x\left[z^{a-1} + (a-1)z^{a-2} + (a-1)(a-2)z^{a-3} + \ldots\right].$$

Schlömilch (*Compendium...*, t. II, p. 261-266) a donné à l'intégrale

$$\int_0^{\omega} x^{a-1} e^{-x}\, dx$$

le nom de fonction gamma incomplète et a trouvé un développement applicable aux valeurs élevées de ω.

Hocevar (*Schlöm. Z.*, t. XXI, p. 449) établit la formule

$$\int_0^{\omega} x^{a-1} e^{-x}\, dx = \frac{\omega^a e^{-\omega}}{a}\left[1 + \frac{\omega}{a+1} + \frac{\omega^2}{(a+1)(a+2)} + \ldots\right],$$

utile pour les valeurs considérables de a et les valeurs petites de ω.

Dans un mémoire *Sul calcolo del valore della funzione* $\Sigma \dfrac{1}{\Gamma(x)}$ (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Naples*, Septembre 1867), M. de Gasparis s'était servi de la décomposition de l'intégrale $\int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$ en deux parties : $\int_0^1 x^{a-1} e^{-x} dx$ et $\int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$ et avait tiré de cette considération plusieurs propriétés remarquables. Mais c'est à Prym (*J. de Cr.*, t. LXXXII) que l'on doit les résultats les plus remarquables qui peuvent se déduire de cette décomposition. « Les conséquences qui en découlent au point de vue de la conception de l'intégrale Eulérienne comme une fonction analytique avaient échappé à M. de Gasparis. Elles supposent, en effet, des notions moins connues alors qu'aujourd'hui sur la théorie générale des fonctions. » (Hermite, *Cours rédigé par Andoyer*.)

M. Hermite a mis en évidence (*J. de Cr.*, t. XC, p. 332 et *Cours rédigé par Andoyer*) l'importance des résultats obtenus par Prym. C'est à lui que l'on doit le développement de la fonction Q au moyen des fonctions P. (*J. de Cr.*)

Dans sa thèse sur le développement en séries des intégrales

Eulériennes, M. Bourguet a rassemblé les résultats dus à M. Prym et à M. Hermite sur les fonctions P et Q. C'est à lui que l'on doit le développement de $e\,\mathrm{P}(a)$ en série de factorielles négatives.

Le calcul numérique de l'intégrale

$$\int_0^x \frac{e^{-\eta\lambda}}{(1+x)^\lambda}\,dx$$

présentait jusqu'alors des difficultés considérables pour le cas des grandes valeurs de η et de λ. M. Gylden (*C. R.*, XCII, p. 897 et 942) a montré comment l'application de la décomposition donnée par M. Hermite

$$\mathrm{Q}(x) = \mathrm{Q}_0 + \mathrm{Q}_1 + \mathrm{Q}_2 + \dots$$

facilitait ce calcul.

§ **6.** Il y a souvent avantage à substituer à la définition de la fonction gamma par une intégrale définie ou par les développements en série obtenus au moyen de cette intégrale, une autre définition qui s'obtient de la manière suivante :

Partons de l'intégrale définie

$$\int_0^1 x^{a-1}\,dx = \frac{1}{a},$$

où a désigne un nombre positif.

Changeons a en $a+1$; il vient

$$\int_0^1 x^a\,dx = \frac{1}{a+1}.$$

Retranchons ces deux égalités membre à membre, nous avons

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)\,dx = \frac{1}{a(a+1)}.$$

Répétons la même opération sur cette nouvelle égalité, nous obtiendrons

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^2\,dx = \frac{1.2}{a(a+1)(a+2)}.$$

et, en général

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^n\,dx = \frac{n!}{a(a+1)\dots(a+n)}.$$

En posant $x = \frac{y}{n}$, cette égalité devient

$$\int_0^n y^{a-1}\left(1-\frac{y}{n}\right)^n dy = \frac{n!\,n^a}{a(a+1)\dots(a+n)};$$

or, si l'on fait croître n indéfiniment $\left(1-\frac{y}{n}\right)^n$ a pour limite e^{-y} et par suite le premier membre a pour limite $\Gamma(a)$, on a donc

$$\Gamma(a) = \lim\left[\frac{n!\,n^a}{a(a+1)\dots(a+n)}\right]_{n=\infty};$$

ou encore si l'on veut

$$\Gamma(a) = \lim\left[\frac{n^a}{a\left(1+\frac{a}{1}\right)\dots\left(1+\frac{a}{n}\right)}\right]_{n=\infty}.$$

On peut prendre cette formule pour définition de la fonction Γ; cette définition a l'avantage de présenter une signification bien déterminée, quelle que soit la valeur positive ou négative, réelle ou imaginaire de a.

En effet, on peut écrire cette formule

$$l\Gamma(a) = a\,ln - \left[la + l\left(1+\frac{a}{1}\right) + \dots + l\left(1+\frac{a}{n}\right)\right];$$

pour s'affranchir de l'indétermination relative aux valeurs multiples des logarithmes, on convient d'adopter, quelle que soit la valeur réelle ou imaginaire de a, la valeur du logarithme qui s'évanouit lorsque l'argument est égal à l'unité.

On a identiquement

$$ln = l\frac{2}{1} + l\frac{3}{2} + \dots + l\frac{n}{n-1};$$

et il vient, en substituant et ajoutant la aux deux membres,

$$
\begin{aligned}
la\Gamma(a) = & \left[a\,l\,\frac{2}{1} - l\left(1+\frac{a}{1}\right)\right] \\
& + \left[a\,l\,\frac{3}{2} - l\left(1+\frac{a}{2}\right)\right] \\
& + \ldots \\
& + \left[a\,l\left(1+\frac{1}{n}\right) - l\left(1+\frac{a}{n}\right)\right] \\
& + \ldots \quad = \sum_1^{\infty}\left[a\,l\left(1+\frac{1}{n}\right) - l\left(1+\frac{a}{n}\right)\right],
\end{aligned}
$$

la série étant prolongée indéfiniment.

Considérons le terme général de cette série

$$u_n = a\,l\left(1+\frac{1}{n}\right) - l\left(1+\frac{a}{n}\right);$$

si l'on suppose n supérieur au module de a, on peut développer en séries convergentes les deux logarithmes, et il vient

$$
\begin{aligned}
u_n &= a\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \ldots\right) - \left(\frac{a}{n} - \frac{a^2}{2n^2} + \ldots\right) \\
&= \frac{a(a-1)}{2n^2} + \ldots \quad = \frac{a(a-1)}{2n^2}(1+\varepsilon),
\end{aligned}
$$

ε étant une quantité qui a pour limite zéro lorsque n augmente indéfiniment. On voit donc que, à partir d'un rang suffisamment éloigné, les termes de la série décroissent comme les termes de la série $\Sigma\,\frac{1}{n^2}$; la série est donc toujours convergente, et par suite aussi le produit infini qui sera employé comme définition de la fonction gamma.

Remarquons que l'expression de $la\Gamma(a)$ met aussi en évidence l'existence des pôles de la fonction gamma. Pour chacun des pôles un des termes de la série devient infini.

La nouvelle définition que nous venons de donner de la fonction gamma donne une vérification immédiate de la relation fonctionnelle.

En ce qui concerne la relation des compléments, on obtient, en remplaçant les facteurs $\Gamma(a)$ et $\Gamma(1-a)$ par les produits dont ces fonctions sont les limites

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \lim \frac{(n!)^2 n}{a(a+1)\ldots(a+n)(1-a)(2-a)\ldots(n+1-a)}$$

$$= \lim \frac{n}{n+1-a} \frac{1}{a\left(1-\frac{a^2}{1}\right)\left(1-\frac{a^2}{4}\right)\ldots\left(1-\frac{a^2}{n^2}\right)};$$

mais $\frac{n}{n+1-a}$ a pour limite l'unité lorsque n augmente indéfiniment; d'autre part, on a la formule connue

$$\sin a\pi = a\pi\left(1-\frac{a^2}{1}\right)\left(1-\frac{a^2}{4}\right)\ldots\left(1-\frac{a^2}{n^2}\right),$$

et il vient

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

L'expression $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ résulte immédiatement aussi de cette définition et de l'expression de $\frac{\pi}{2}$ sous forme de produit infini donnée par Wallis.

Posons

$$\pi(\mu, a) = \frac{\mu!\,\mu^a}{(a+1)(a+2)\ldots(a+\mu)},$$

en sorte que

$$\pi(\infty, a) = a\Gamma(a) = \Gamma(a+1);$$

on vérifie immédiatement l'identité

$$n^{na}\frac{\pi(\mu, a)\,\pi\left(\mu, a-\frac{1}{n}\right)\ldots\pi\left(\mu, a-\frac{n-1}{n}\right)}{\pi(n\mu, na)} = \frac{(\mu!)^n n^{n\mu}}{n\mu!\,\mu^{\frac{n-1}{2}}};$$

le premier membre est donc indépendant de a; pour avoir sa valeur il suffira de donner à a une valeur particulière. Or on a

$$\pi(\mu, 0) = 1,$$

et en faisant $a = 0$, le premier membre devient

$$\pi\left(\mu, -\frac{1}{n}\right)\pi\left(\mu, -\frac{2}{n}\right)\ldots\pi\left(\mu, -\frac{n-1}{n}\right),$$

et en faisant croître μ indéfiniment

$$\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(1-\frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{-\frac{1}{2}},$$

et l'on a enfin

$$\frac{\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(a+\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)\Gamma(a+1)}{\Gamma(na+1)} n^{na} = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{-\frac{1}{2}}$$

ou bien à cause de la formule

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a),$$

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{1}{2}} n^{-na}\Gamma(na).$$

Gauss, dans son mémoire intitulé « *Disquisitiones generales circa seriem infinitam*

$$1 + \frac{\alpha}{1}\frac{\beta}{\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2}\frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}x^2 + \ldots »$$

a pris la formule

$$\Gamma(a) = \lim\left[\frac{n!\,n^a}{a(a+1)\ldots(a+n)}\right]_{n=\infty}$$

pour définition de la fonction $\Gamma(a)$ qu'il appelle $\Pi(a-1)$, préférant cette définition qui présente un sens pour toutes les valeurs de l'argument a à la définition par une intégrale définie. Les raisons qui l'ont guidé sont exposées par lui dans ses lettres à Bessel, en particulier dans sa lettre du 21 novembre 1811 (*Briefwechsel zwischen Gauss und Bessel*, p. 152). Il est juste cependant de remarquer que, si Gauss a eu le mérite de mettre en évidence l'importance de ce mode de détermination de la fonction

gamma, la formule même d'où il est parti était déjà connue d'Euler. Dès ses premiers travaux sur l'interpolation de la série

$$1,\ 2,\ 6,\ 24,\ 120,$$

Euler était arrivé à une formule qui coïncide avec la définition prise par Gauss. La correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII^e^ siècle, publiée en 1843 par P. H. Fuss, nous donne à ce sujet des renseignements précieux.

En 1728 et 1729, Goldbach et D. Bernoulli s'occupaient de la détermination des termes généraux des séries et de l'interpolation des suites, en particulier de celle-ci

$$1 + 1.2 + 1.2.3 + 1.2.3.4 + \ldots$$

Euler, alors à Saint-Pétersbourg, eut connaissance par D. Bernoulli des recherches de Goldbach et c'est à cette occasion que commença entre Euler et ce dernier, en 1729, une correspondance qui dura jusqu'à la mort de Goldbach, en 1764. Les premières de ces lettres sont si importantes pour l'histoire de la théorie de la fonction gamma, que nous avons cru devoir en transcrire les passages les plus importants.

« Petropoli, d. 13 octobr. A. 1729.

» Cum nuper in nonnulla incidissem, quæ ad interpolandas » series, legem, uti appellare soles variabilem habentes, facere » visa sunt, ea accuratius contemplatus sum, et multa, quæ huc » attinent, detexi. Quæ, quia tibi, vir celeberrime, placitura esse » mihi significavit Clarissimus Bernoulli, Tibi scribere, Tuoque » submittere judicio statui. Hujus seriei 1, 2, 6, 24, 120, etc., » quam a Te multum tractatam esse vidi, hunc inveni terminum » generalem

$$\frac{1\,2^m}{1+m}\cdot\frac{2^{1-m}\,3^m}{2+m}\cdot\frac{3^{1-m}\,4^m}{3+m}\cdot\frac{4^{1-m}\,5^m}{4+m},\ \text{etc.},$$

» ex infinito factorum numero constantem, qui terminum ordine » m^{mum} exprimit. Is quidem in nullo casu abrumpitur, et æque si » m est numerus integer, tantum ad verum magis magisque

» accedit, ac si m fuerit fractus. Sed tamen per eum admodum » prope quemque terminum invenire licet, idque eo facilius, quo » minus assumatur m. Si autem aliquot solum uti visum sit, » factoribus, termino generali commodior induci potest forma : » ut si duobus prioribus factoribus contenti esse velimus, habe- » bitur $\frac{1.2}{(1+m)(2+m)} 3^m$ pro termino ordine m. Sin autem » generaliter n factores capiantur, sequentibus reliquis neglectis, » erit terminus generalis $\frac{1.2.3 \ldots n}{(1+m)(2+m)\ldots(n+m)}(n+1)^m$, » qui quo major accipitur numerus n, eo propius ad verum » accedet. Communicavi hæc cum Clar. Bernoulli, qui peculiari » modo eundem fere postremum eruit terminum, in hoc a meo » diversum, quod aliam potestatem loco $(n+1)^m$ adhibeat, in » qua determinanda fortasse factorum neglectorum rationem » habuit. Credo ipsum Tibi nuper inde deductum numerum » termino seriei, cujus index est $1\frac{1}{2}$, proximum misisse (1).

» ... Terminum hunc generalem ex eo inveni fundamento, quod » hæc series 1, 2, 6, 24, etc. in infinitum continuata tandem » evadit geometrica. Et hujusmodi terminos generales etiam pro » aliis seriebus, quæ in infinitum cum geometricis confunduntur » exhibere in promtu est. Sed cum hoc modo termini intermedii » non nisi veris proximi inveniantur, omissa hac serierum tractan- » darum ratione, aliter in hac re versari cœpi, in id intentus, ut » terminos intermedios non tantum veris proximos, sed ipsos » veros, si fieri posset, invenirem... »

Dans sa réponse, Goldbach essaie de fournir une démonstration de la formule donnant le terme général et se propose d'étendre à

(1) En effet, dans une lettre datée du 6 octobre 1729, D. Bernoulli s'exprime ainsi : « Voici le terme général pour la suite $1 + 1.2 + 1.2.3 +$ etc... Soient x l'ex- » posant du terme et A un nombre infini, je dis que le terme général sera

$$\left(A+\frac{x}{2}\right)^{x-1}\left(\frac{2}{1+x}\cdot\frac{3}{2+x}\cdot\frac{4}{3+x}\cdot\ldots\frac{A}{A-1+x}\right).$$

» Si, au lieu de prendre A infiniment grand, on le fait $=$ à un nombre un peu » grand, on aura le terme général à peu près. »

Dans une lettre du 20 octobre, D. Bernoulli remarque lui-même que sa formule doit être corrigée.

d'autres suites, le résultat obtenu par Euler. Le 8 janvier 1730, Euler lui adressa une nouvelle lettre.

« Quæ nuper de methodo mea progressionum terminos medios » ex quadraturis inveniendi scripsi, ea non ope serierum infini- » tarum terminos illos exprimentium perficio, maxime enim » arduum esse arbitror de quaque serie infinita, ad quam perti- » neat quadraturam pronunciare; quanquam non negem, me » primo ex serie terminum generalem progressionis $1+2+6$ » $+24+$ etc. exhibente, quam Tibi, Vir Celeberrime, perscripsi, » conclusisse terminum ordine $\frac{1}{2}$ a quadratura circuli pendere. » Deinde autem eodem modo circa alias progressiones versari » diffidens id meditatus sum, quomodo alia via eodem pervenire » possim quæ non seriebus dignoscendis contineatur. In aliam » igitur atque novam incidi rationem progressionum terminis » generalibus denotandarum. Ea in hoc consistit, ut formulas » integrales in terminos generales recipiam.... Fundamenti loco » mihi fere fuit hæc progressio $1+1.2+1.2.3+$ etc., cujus » terminus generalis mihi inventus est $\int dx\,(-lx)^n$.... »

Nous voyons donc qu'Euler avait trouvé la formule que Gauss a prise depuis comme définition; mais nous reconnaissons aussi qu'il ne s'en est pas tenu à son premier résultat et qu'il a préféré la représentation par une intégrale définie. C'est à ce dernier point de vue qu'il s'est placé dans son premier mémoire sur les fonctions qui nous occupent (*Comm. Ac. Petr.*, t. V, p. 36).

La série

$$l a \Gamma(a) = \sum_1^\infty \left[a l(1+n) - l\left(1+\frac{a}{n}\right) \right],$$

qui se déduit si facilement de la définition de la fonction gamma, est une simple transformation d'une formule due à Gudermann (*J. de Cr.*, t. XXIX, p. 209) (V. § 11). La formule de Gudermann est de la dernière importance dans cette théorie et, comme le remarque Liouville (*C. R.*, t. XXXV, p. 319), on l'y rencontre presque à chaque pas.

Nous sommes partis de la définition par une intégrale définie pour arriver à la définition de Gauss; une quelconque des intégrales définies du § 1 aurait pu être employée, avec quelques légères modifications de détail.

Gauss a naturellement suivi le procédé inverse et a montré que l'on pouvait repasser du produit infini à l'intégrale définie (*Werke*, t. III, p. 151). Voir aussi *Genocchi* (*Bull. Ac. de Belg.*, t. XXI, p. 84).

§ **7.** L'expression de $\Gamma(a)$ sous forme de produit conduit à une série donnant $l\Gamma(a+1)$ développée suivant les puissances de a.

En changeant a en $a+1$, on a

$$\Gamma(a+1) = \frac{n!\,n^{a+1}}{(a+1)(a+2)\ldots(a+n+1)},$$

ou bien, en remarquant que $\dfrac{n}{a+n+1}$ a pour limite l'unité,

$$\Gamma(a+1) = \frac{n^a}{\left(1+\frac{a}{1}\right)\left(1+\frac{a}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{a}{n}\right)};$$

d'où l'on déduit

$$(1)\quad l\Gamma(a+1) = a\,l n - l\left(1+\frac{a}{1}\right) - l\left(1+\frac{a}{2}\right) - \ldots - l\left(1+\frac{a}{n}\right)$$

où l'on suppose que le nombre entier n augmente indéfiniment.

Si l'on suppose a moindre que l'unité, on peut développer les logarithmes qui figurent au second membre en séries ordonnées suivant les puissances de a, et l'on obtient

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} l\Gamma(a+1) = &- a\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdots+\frac{1}{n}-l n\right)\\ &+\frac{a^2}{2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\cdots+\frac{1}{n^2}\right)\\ &-\frac{a^3}{3}\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}\cdots+\frac{1}{n^3}\right)\\ &+\ldots,\end{aligned}\right.$$

et en posant pour une valeur infinie de n

$$S_p = \lim \left(1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p}\right), \tag{3}$$

et

$$\gamma = \lim \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots + \frac{1}{n} - ln\right), \tag{4}$$

on a enfin

$$l\Gamma(a+1) = -\gamma a + \frac{1}{2} S_2 a^2 - \frac{1}{3} S_3 a^3 + \frac{1}{4} S_4 a^4 - \dots \tag{5}$$

Cette série est évidemment convergente pour toute valeur de a inférieure à l'unité; les coefficients qui apparaissent dans ce développement ont été calculés très exactement; on a d'une part

$$\gamma = 0{,}57721\ 56649\ 015328. \tag{6}$$

Les coefficients S sont donnés dans le tableau suivant jusqu'à S_{35} avec seize décimales exactes

n	S_n			n	S_n		
2	1,64493	40668	482264	19	1,00000	19082	127166
3	1,20205	69031	595943	20	1,00000	09539	620339
4	1,08232	32337	111382	21	1,00000	04769	329868
5	1,03692	77551	433700	22	1,00000	02384	505027
6	1,01734	30619	844491	23	1,00000	01192	199260
7	1,00834	92773	819227	24	1,00000	00596	081891
8	1,00407	73561	979443	25	1,00000	00298	035035
9	1,00200	83928	260822	26	1,00000	00149	015548
10	1,00099	45751	278180	27	1,00000	00074	507118
11	1,00049	41886	041194	28	1,00000	00037	253340
12	1,00024	60865	533080	29	1,00000	00018	626597
13	1,00012	27133	475785	30	1,00000	00009	313274
14	1,00006	12481	550587	31	1,00000	00004	656629
15	1,00003	05882	363070	32	1,00000	00002	328312
16	1,00001	52882	594086	33	1,00000	00001	164155
17	1,00000	76371	976379	34	1,00000	00000	582077
18	1,00000	38172	932650	35	1,00000	00000	291038

On peut donner au développement de $l\Gamma(a+1)$ une autre forme beaucoup plus convergente, en éliminant les sommes dont l'indice est pair :

En effet, on déduit des deux formules

$$l\Gamma(1+a) = -\gamma a + \frac{1}{2}S_2 a^2 - \frac{1}{3}S_3 a^3 + \frac{1}{4}S_4 a^4 - \ldots$$

$$l\Gamma(1-a) = \quad \gamma a + \frac{1}{2}S_2 a^2 + \frac{1}{3}S_3 a^3 + \frac{1}{4}S_4 a^4 + \ldots$$

en tenant compte de la relation des compléments

$$\frac{1}{2}l[\Gamma(1+a)\Gamma(1-a)] = \frac{1}{2}l\frac{a\pi}{\sin a\pi} = \frac{1}{2}S_2 a^2 + \frac{1}{4}S_4 a^4 + \ldots,$$

et on obtient, en substituant dans la formule qui donne $l\Gamma(a+1)$:

$$(7)\quad l\Gamma(a+1) = \frac{1}{2}l\frac{a\pi}{\sin a\pi} - \left(\gamma a + \frac{1}{3}S_3 a^3 + \frac{1}{5}S_5 a^5 + \ldots\right).$$

Il est encore possible d'augmenter la convergence en ajoutant aux deux membres les deux membres de l'équation identique

$$0 = -\frac{1}{2}l\frac{1+a}{1-a} + a + \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{5}a^5 + \ldots$$

et l'on a alors

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} l\Gamma(1+a) &= \frac{1}{2}l\frac{a\pi}{\sin a\pi} - \frac{1}{2}l\frac{1+a}{1-a} + a(1-\gamma) \\ &\quad + \frac{a^3}{3}(1-S_3) + \frac{a^5}{5}(1-S_5) + \ldots, \end{aligned}\right.$$

et on a ainsi une série très convergente pour les petites valeurs de a.

C'est à Euler que l'on doit le développement de la fonction $l\Gamma(1+a)$ en série convergente (*Calc. diff.*, p. 800). Legendre donna les formules plus convergentes (7) et (8) (*Exerc. d'An.*, t. I, p. 296).

Les valeurs de S_2, S_3, … avaient été données par Euler (*Calc. Diff.*, p. 456) jusqu'à S_{16} avec seize décimales; mais Legendre

ayant trouvé dans la table d'Euler quelques erreurs assez graves, la calcula de nouveau et donna le tableau que nous avons reproduit. (Legendre, *Exerc.*, t. II, p. 65.)

La quantité γ qui se présente dans le développement de $l\Gamma(a+1)$ est, après les nombres π et e, une des constantes les plus importantes que l'on rencontre en analyse.

On la désigne en général sous le nom de constante d'Euler.

On l'a aussi appelée constante de Mascheroni (Bauer, *J. de Cr.*, t. LVII, p. 128. — Mellin, *Ofversigt* ... 1883, p. 19) ou encore constante du logarithme intégral.

On a employé également pour la représenter bien des notations :

Euler, Legendre, Lindman, ... ont choisi la lettre C;

Euler l'a aussi désignée par la lettre O;

Bierens de Haan, dans ses *Tables d'intégrales définies*, se sert de la lettre A;

Mascheroni avait pris la notation γ qui présente l'avantage de rappeler l'importance de cette constante dans la théorie de la fonction Γ, sans donner lieu à aucune ambiguïté.

Comme le remarque Glaisher (*On the history of Euler's constant*, — *Mess. of Math.*, t. I_2, 1872), à qui nous empruntons bon nombre des renseignements qui vont suivre, cette constante doit son importance tout d'abord à son apparition à l'une des périodes les plus remarquables de l'histoire des mathématiques et dans l'étude de la série harmonique, et aussi à son emploi dans la théorie de la fonction gamma, du logarithme intégral, du cosinus intégral, ...

Dans la première moitié du XVIII^e siècle la théorie des séries infinies commença à exciter l'attention des géomètres; Euler et les Bernoulli écrivirent de nombreux mémoires sur ce sujet. La série harmonique en particulier les occupa à maintes reprises pendant cette période; elle était remarquable en ce sens que seule de la suite des séries $1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\ldots$ elle était divergente.

Jean Bernoulli (*Ars conjectandi*, p. 250) attribue à son frère la découverte de la divergence de la série $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$, mais

c'est Euler qui établit le premier la relation qui existe entre la somme $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{x}$ et lx. Dans un mémoire « *De progressionibus harmonicis observationes* » (*Com. Ac. Petr.*, t. VII, 1734-1735, p. 156), il part de la formule

$$\frac{1}{i}=l\frac{i+1}{i}+\frac{1}{2}\frac{1}{i^2}-\frac{1}{3}\frac{1}{i^3}+\frac{1}{4}\frac{1}{i^4}-\ldots,$$

et en déduit en faisant successivement $i=1, 2, \ldots i$ et ajoutant membre à membre les résultats obtenus

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned}1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{i}&=l(i+1)+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\ldots\right)\\&\quad-\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2^3}+\ldots\right)+\ldots,\end{aligned}\right.$$

d'où

$$\gamma=\frac{1}{2}S_2-\frac{1}{3}S_3+\frac{1}{4}S_4-\ldots;$$

il trouve par approximation

$$\gamma=0{,}577218.$$

En 1769 (*N. Comm.*, t. XIV, p. 153), Euler revint sur cette question et établit une série que nous rencontrerons plus tard (§ 13) :

$$(10)\quad 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{x}=\gamma+lx+\frac{1}{2x}-\frac{B_1}{2x^2}+\frac{B_2}{4x^4}-\frac{B_3}{6x^6}+\ldots,$$

où les quantités B sont les nombres de Bernoulli. En faisant $x=10$, il trouve

$$\gamma=0{,}57721\,56649\,015325.$$

Il donne aussi alors la formule

$$\gamma=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\right)+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\ldots\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\ldots\right)+\ldots$$

Enfin, en 1781 (*Acta Petr.*, t. V, P. II, p. 45), il communique un nouveau mémoire, *De numero memorabili in summatione progressionis harmonicæ naturalis occurrenti*, où il cherche d'abord,

mais sans succès, à reconnaître si γ n'est pas le logarithme d'un nombre remarquable. Ne pouvant réussir à relier ainsi γ à une autre constante, Euler établit quelques nouvelles formules pour γ, donnant comme raison la loi compliquée que suivent les nombres de Bernoulli.

Les développements nouveaux auxquels il arrive sont les suivants :

$$(11) \qquad 1-\gamma = \frac{1}{2}(S_2-1) + \frac{1}{3}(S_3-1) + \frac{1}{4}(S_4-1) + \ldots$$

$$(12) \qquad 2\gamma-1 = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}S_2\right) + \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{2}{5}S_4\right) + \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{2}{7}S_6\right) + \ldots$$

$$(13) \; 2-2l2-\gamma = \left(\frac{2}{3}\frac{7}{8}S_2-\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{5}\frac{31}{32}S_4-\frac{2}{5}\right) + \left(\frac{2}{7}\frac{127}{128}S_6-\frac{2}{7}\right) + \ldots$$

$$(14) \; 1-2l2+\gamma = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\,\frac{2}{3.2^3}S_2\right) + \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\,\frac{2}{5.2^5}S_4\right) + \ldots$$

$$(15) \qquad l2-\gamma = \frac{1}{3.2^2}S_2 + \frac{1}{5.2^4}S_4 + \frac{1}{7.2^6}S_6 + \ldots$$

$$(16) \; 1-l\frac{3}{2}-\gamma = \frac{1}{3.2^2}(S_2-1) + \frac{1}{5.2^4}(S_4-1) + \frac{1}{7.2^6}(S_6-1) + \ldots$$

Euler calcule au moyen de (11) γ avec 5 décimales exactes, au moyen de (16) avec 12 décimales.

Mascheroni, dans ses *Adnotationes ad Euleri Calculum Integralem,* étendit le calcul jusqu'à 32 décimales :

$$\gamma = 0{,}57721\;56649\;01532\;86061\;81120\;90082\;39.$$

Cette valeur fut reproduite par Lacroix (*Calc. D. et I.*, t. III, p. 521).

En 1809, Soldner publia à Munich sa *Théorie d'une nouvelle fonction transcendante*. Cette fonction n'est autre que le logarithme intégral

$$li\,x = \int_0^x \frac{dx}{lx} = \gamma + l.lx + lx + \frac{(lx)^2}{2} + \ldots$$

Soldner donne pour la constante d'Euler

$$\gamma = 0{,}57721\ 56649\ 01532\ 86060\ 6065,$$

et cette valeur diffère de celle de Mascheroni à partir de la vingtième décimale.

Gauss fut alors amené à refaire faire le calcul par F. C. B. Nicolaï (*Werke*, t. III, p. 154, *Briefwechsel zwischen Gauss und Bessel*, p. 150).

L'emploi de la formule (10) pour $x = 50$ et $x = 100$ fournit γ avec 40 décimales exactes.

La valeur donnée par Soldner était vérifiée. Cependant le nombre donné par Mascheroni fut encore reproduit. Dans son supplément au dictionnaire de Klügel, Grünert donna les deux valeurs.

Lindman, ne connaissant point le calcul de Nicolaï, fut conduit à calculer de nouveau la constante (*Grün. Arch.*, t. XXIX, p. 238); il emploie la formule (10) et obtient γ à 24 décimales exactes en faisant $x = 20$, à 34 décimales exactes en faisant $x = 100$.

Quatre ans plus tard, Oettinger recommença encore le même calcul. La même formule (10) lui donna γ avec 18, 25, 34 et 41 décimales exactes en y faisant successivement $x = 10$, 20, 50 et 100 (*J. de Cr.*, t. X, p. 375).

Enfin Shanks (*Proc. Roy. Soc.*, t. XV, p. 429) calcula γ avec 21, 28, 39, 46, 54, 59 et 59 décimales, en faisant x égal à 10, 20, 50, 100, 200, 500 et 1000.

Le même calculateur continua ses calculs et donna successivement γ avec 80 décimales (*Proc. Roy. Soc.*, t. XVI, p. 154 et 299) et avec 110 décimales (*l. c.*, t. XIX, p. 29); mais, d'après Glaisher (*l. c.*, t. XIX, p. 514), les résultats de Shanks ne sont justes que jusqu'à la 59^{me} décimale. On a

$$\begin{aligned}\gamma = 0{,}57721\ 56649\ 01532\ 86060\ 65120\ 90082 \\ 40243\ 10421\ 59335\ 93992\ 35988\ 0577\ldots\end{aligned}$$

Dans ses *Exercices d'Analyse*, Legendre remarque que le

développement de $l\,\Gamma(a+1)$ donnera γ lorsque l'on prendra pour a une valeur telle que $l\,\Gamma(a+1)$ soit connu.

Il arrive ainsi à la formule (16) et à la suivante :

$$(17) \qquad 1-\gamma = \frac{1}{2}\,l2 + \frac{1}{3}(S_3 - 1) + \frac{1}{5}(S_5 - 1) + \dots$$

Il donne également

$$(18) \qquad \gamma = l\,\frac{4}{\pi} + \frac{1}{2}\,S_2\,\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\,S_3\,\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\,S_4\,\frac{1}{8} - \dots$$

Remarquons encore que Bretschneider (*J. de Cr.*, t. XIX, p. 260) a attribué à Kramp la valeur donnée par Mascheroni, mais c'était probablement par erreur, puisque, plus tard, Bretschneider lui-même, faisant allusion à l'erreur, parle du calcul de Mascheroni (*Zeits. f. M. und Ph.*, t. VI, p. 231). Glaisher a cherché dans les travaux de Kramp, sans trouver de trace du calcul de γ.

§ **8.** On a trouvé précédemment que

$$(1) \qquad \Gamma(a) = \mu^a\,\frac{1.2.3\dots\mu}{a(a+1)\dots(a+\mu)},$$

en supposant que, dans le second membre, le nombre entier μ augmente indéfiniment, on en conclut

$$(2) \qquad l\Gamma(a) = a\,l\mu + l(1.2.3\dots\mu) - la - l(a+1) - \dots - l(a+\mu),$$

et par suite, en posant

$$(3) \qquad \psi(a) = \frac{d}{da}\,l\Gamma(a),$$

$$(4) \qquad \psi(a) = l\mu - \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} - \dots - \frac{1}{a+\mu}, \qquad (\mu = \infty).$$

On a en particulier, en faisant $a = 1$,

$$(5) \qquad \psi(1) = l\mu - \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{\mu+1} = -\gamma.$$

c'est-à-dire que $\psi(1)$ est égale à la constante d'Euler que nous avons déjà rencontrée changée de signe :

$$\psi(1) = -0,5772156649\ldots$$

La fonction $\frac{d}{da} l\Gamma(a)$ a été désignée par Gauss (*Werke*, t. III, p. 152) par le symbole $\Psi(a+1)$; Legendre (*Exerc.*, t. II, p. 16 et p. 52) se sert de $\varphi(a)$ et $Z'(a)$; Bierens de Haan a employé cette dernière notation dans ses *Tables d'intégrales définies*. Binet (*J. Ec. Pol.*, cah. 27) a employé le symbole $\lambda'(a)$. Cauchy, Gudermann, et la plupart des géomètres ont employé depuis le signe ψ. La formule (4) a été établie d'une façon différente par Legendre (*Exerc.*, t. II, p. 17) et par Gudermann (*J. de Cr.*, t. XXIX, p. 208).

Aux relations qui existent entre les fonctions gamma correspondent des relations entre les fonctions ψ.

La relation

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$$

donne, en prenant les dérivées logarithmiques des deux membres

$$\psi(a+1) = \psi(a) + \frac{1}{a}, \tag{6}$$

et plus généralement, en désignant par n un nombre entier,

$$\psi(a+n) = \psi(a) + \frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} + \ldots + \frac{1}{a+n-1}. \tag{7}$$

La relation

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}$$

donne de même

$$\psi(a) - \psi(1-a) = -\pi \cot a\pi. \tag{8}$$

Enfin, la relation de Gauss

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\dots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}n^{\frac{1}{2}}n^{-na}\Gamma(na)$$

fournit par la même méthode la relation

$$(9)\qquad \psi(a)+\psi\left(a+\frac{1}{n}\right)+\dots+\psi\left(a+\frac{n-1}{n}\right)=n\psi(na)-nln.$$

La formule

$$(10)\qquad \psi(a+n)=\psi(a)+\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}+\dots+\frac{1}{a+n-1}$$

peut être considérée comme un cas particulier d'une formule plus générale.

En posant

$$\psi(a+x)=\alpha+\beta x+\gamma x(x-1)+\delta x(x-1)(x-2)+\dots,$$

on peut déterminer α, β, γ ..., par la méthode des coefficients indéterminés.

En faisant $x=0$, on a tout d'abord

$$\alpha=\psi(a).$$

En changeant x en $x+1$ et désignant par le signe $\Delta\varphi(x)$ l'accroissement qui en résulte pour une fonction quelconque $\varphi(x)$, on a

$$\begin{aligned}\Delta\psi(a+x)&=\psi(a+x+1)-\psi(a+x)\\&=\frac{d}{dx}[l\Gamma(a+x+1)-l\Gamma(a+x)]\\&=\frac{d}{dx}l(a+x)=\frac{1}{a+x};\end{aligned}$$

d'autre part

$$\Delta x=1,\quad \Delta x(x-1)=2x,\quad \Delta x(x-1)(x-2)=3x(x-1)\dots,$$

et il vient

$$\frac{1}{a+x}=\beta+2\gamma x+3\delta x(x-1)+4\varepsilon x(x-1)(x-2)+\dots$$

En faisant $x = 0$, on en déduit

$$\beta = \frac{1}{a}.$$

Prenant de nouveau les accroissements des deux membres, on aura :

$$\Delta \frac{1}{a+x} = 2\gamma + 2.3\delta x + 3.4\varepsilon x(x-1) + \dots,$$

$$\Delta^2 \frac{1}{a+x} = 2.3\delta + 2.3.4\varepsilon x + \dots,$$

$$\Delta^3 \frac{1}{a+x} = 2.3.4\varepsilon + \dots,$$

et en faisant $x = 0$

$$2\gamma = \Delta \frac{1}{a} = \frac{1}{a+1} - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a(a+1)},$$

$$2.3\delta = \Delta^2 \frac{1}{a} = -\frac{1}{(a+1)(a+2)} + \frac{1}{a(a+1)} = \frac{2}{a(a+1)(a+2)},$$

$$2.3.4\varepsilon = \Delta^3 \frac{1}{a} = \frac{2}{(a+1)(a+2)(a+3)} - \frac{2}{a(a+1)(a+2)}$$

$$= \frac{-3.2}{a(a+1)(a+2)(a+3)}.$$

La loi est évidente et l'on a

$$(11) \quad \psi(a+x) = \psi(a) + \frac{x}{a} - \frac{x(x-1)}{2a(a+1)} + \frac{x(x-1)(x-2)}{3a(a+1)(a+2)} - \dots$$

Si l'on donne à x une valeur entière et positive n, le second membre ne contient qu'un nombre limité de termes, et l'on a

$$\psi(a+n) = \psi(a) + \frac{n}{a} - \frac{n(n-1)}{2a(a+1)} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3a(a+1)(a+2)} + \dots$$

$$\dots + \frac{(-1)^n n!}{(n+1)a(a+1)\dots(a+n+1)},$$

et, comparant à la formule (10), on a l'identité

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}+\ldots+\frac{1}{a+n+1}=\frac{n}{a}-\frac{n(n-1)}{2a(a+1)}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{(-1)^n n!}{(n+1)a(a+1)\ldots(a+n+1)},$$

qu'il est facile de vérifier.

Le développement trouvé pour $\psi(a+x)$ conduit, en y faisant $a=1$ et $x=a$, à une formule d'où l'on tire facilement l'expression de la fonction ψ par une intégrale définie.

On a

$$(12)\quad \psi(1+a)=\psi(1)+a-\frac{1}{2}\frac{a(a-1)}{2}+\frac{1}{3}\frac{a(a-1)(a-2)}{3!}-\ldots;$$

or, on a

$$(1-x)^a=1-ax+\frac{a(a-1)}{1.2}x^2-\frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3+\ldots,$$

et par suite

$$\frac{1-(1-x)^a}{x}=a-\frac{a(a-1)}{1.2}x+\frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^2-\ldots,$$

et par conséquent

$$(13)\qquad \psi(1+a)=\psi(1)+\int_0^1\frac{1-(1-x)^a}{x}\,dx,$$

ou bien, en posant $y=1-x$,

$$(14)\qquad \psi(1+a)=\psi(1)+\int_0^1\frac{y^a-1}{y-1}\,dy.$$

Cette formule peut s'obtenir sans avoir recours au développement de ψ.

On a

$$(15)\qquad \psi(x)=l\mu-\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\ldots-\frac{1}{x+\mu},$$

en supposant que dans le second membre μ augmente indéfiniment.

Dans ces conditions on peut aussi écrire :

$$(16) \qquad \psi(x) = l\mu - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \ldots - \frac{1}{x+\mu-1}.$$

$\psi(x)$ se présente comme la différence des deux quantités que l'on peut exprimer par des intégrales définies.

En effet, en ce qui concerne $l\mu$, il suffit de remarquer que $l\mu$ peut être considérée comme la différence des valeurs que prend la fonction $l\,\frac{1-z^\mu}{1-z}$ pour $z=1$ et $z=0$ pour en déduire

$$(17) \qquad l\mu = \int_0^1 d\,l\,\frac{1-z^\mu}{1-z} = \int_0^1 \left(\frac{1}{1-z} - \frac{\mu z^{\mu-1}}{1-z^\mu}\right) dz.$$

D'autre part, on a, en effectuant la division,

$$(18) \qquad \int_0^1 \frac{z^{x-1} - z^{x+\mu-1}}{1-z}\,dz = \frac{1}{z} + \frac{1}{z+1} + \ldots + \frac{1}{z+\mu-1},$$

et il vient

$$\psi(x) = \int_0^1 \frac{1-z^{x-1}}{1-z}\,dz + \lim\left[\int_0^1 \left(\frac{z^{x+\mu-1}}{1-z} - \frac{\mu z^{\mu-1}}{1-z^\mu}\right) dz\right]_{\mu=\infty}.$$

Le second terme est indépendant de x; si on y change, en effet, x en $x+\alpha$, l'accroissement qui en résulte est égal à

$$\int_0^1 \frac{z^{x+\alpha+\mu-1} - z^{x+\mu-1}}{1-z}\,dz = \int_0^1 \frac{z^{x+\mu-1}(z^\alpha-1)}{1-z}\,dz,$$

dont la valeur est nulle évidemment lorsque μ est infini.

On a donc enfin

$$(19) \qquad \psi(x) = c + \int_0^1 \frac{1-z^{x-1}}{1-z}\,dz,$$

ou en faisant $x=1$, on trouve $c=\psi(1)$. En posant $x=1+a$ on retrouve la formule (14).

La formule

$$\psi(x) = \psi(1) + \int_0^1 \frac{1-z^{x-1}}{1-z}\,dz$$

montre que si x est rationnel, $\psi(x)-\psi(1)$ peut se calculer sous forme finie. On a par exemple

$$\psi\left(\frac{3}{2}\right)=\psi(1)+\int_0^1\frac{1-\sqrt{z}}{1-z}\,dz=\psi(1)+2-l2,$$

$$\psi\left(\frac{4}{3}\right)=\psi(1)+\int_0^1\frac{1-z^{\frac{1}{3}}}{1-z}\,dz=\psi(1)+3-\frac{3}{2}\,l3-\frac{\pi}{6}\sqrt{3}.$$

Legendre avait donné (*Exerc.*, t. II, p. 46) une démonstration peu satisfaisante de la formule (14). Elle a été établie depuis de bien des manières.

Cauchy, *J. Ec. Pol.*, t. XVIII, p. 147.
Cisa de Crésy, *Mém. Turin*, 1821, p. 209.
Lobatschewsky, *Mém. Kasan*, 1835.
Schlömilch, *Gr. Arch.*, t. IV, p. 167.
— — t. IX, p. 5.
— *Studien*, I, p. 6.

Des formules

$$(20)\qquad \begin{cases}\psi(1+a)=\psi(1)+\displaystyle\int_0^1\frac{z^a-1}{z-1}\,dz,\\ \psi(1+b)=\psi(1)+\displaystyle\int_0^1\frac{z^b-1}{z-1}\,dz,\end{cases}$$

on déduit par soustraction

$$(21)\qquad \int_0^1\frac{z^a-z^b}{1-z}\,dz=\psi(1+b)-\psi(1+a),$$

et par conséquent

$$\int_0^1\frac{z^{-a}-z^a}{1-z}\,dz=\psi(1+a)-\psi(1-a)=\frac{1}{a}+\psi(a)-\psi(1-a)$$

ou bien

$$(22)\qquad \int_0^1\frac{z^{-a}-z^a}{1-z}\,dz=\frac{1}{a}-\pi\cot a\pi.$$

En multipliant les deux membres par da et intégrant de 0 à a, on aura

$$(23)\qquad \int_0^1 \frac{z^a + z^{-a} - 2}{1-z}\,\frac{dz}{lz} = l\,\frac{a}{\sin a\pi} - l\,\frac{1}{\pi} = l\,\frac{a\pi}{\sin a\pi}.$$

Cette formule conduit à la détermination de quelques intégrales remarquables.

Si l'on fait, par exemple, $a = \frac{1}{2}$ et $z = x^2$, on a

$$\int_0^1 \frac{x + \frac{1}{x} - 2}{1 - x^2}\,\frac{x}{lx}\,dx = \int_0^1 \frac{1-x}{1+x}\,\frac{dx}{lx} = l\,\frac{\pi}{2};$$

si l'on fait $a = \frac{1}{4}$, puis $z = y^4$, on a

$$\int_0^1 \frac{(1-y)\,y^2}{(1+y)(1+y^2)\,ly}\,dy = l\,\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

La formule (21) est due à Gauss (*Werke*, t. III, p. 160) qui en a déduit en particulier l'expression

$$l\,\frac{\alpha}{\beta} = \int_0^1 \frac{u^{\alpha-1} - u^{\beta-1}}{lu}\,du,$$

formule qu'Euler avait trouvée d'une façon bien différente. (*Act. Petr.*, 1777, p. 29. — *Calc. Int.*, t. IV, p. 272.)

La formule particulière (23) a été employée par

Stern, *J. de Cr.*, t. XXI, p. 377.

Schlömilch, *Gr. Arch.*, t. IV, p. 167.

— *Beiträge*, III, p. 9.

Mais une des formules les plus importantes qui se déduisent de (21) est la suivante :

$$\int_0^1 \frac{x^a - x^{1-a}}{1-x}\,\frac{dx}{x} = \pi \cot a\pi.$$

Euler, *Calc. Int.*, t. IV, p. 122....

Legendre, *Exerc.*, t. II, p. 48.

M. Hermite (*Atti di Torino*, t. XIV, p. 91) a montré l'importance de cette intégrale dans la théorie de la fonction gamma.

Voir aussi Bourguet (*Ann. Ec. Norm.*; Thèse, p. 8).

§ **9.** On peut démontrer, sans avoir recours à l'expression de $\psi(a)$ sous forme d'intégrale définie, que cette fonction se calcule sous forme finie toutes les fois que a est un nombre rationnel.

Considérons la fonction $\psi\left(\frac{p}{q}\right)$, p et q étant deux nombres entiers et p étant plus petit que q.

$\psi(a)$ est la limite de l'expression

$$l\mu - \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} - \ldots - \frac{1}{a+\mu}$$

lorsque μ croît indéfiniment; on peut donc écrire

$$\psi(a) = -\frac{1}{a} + l2 - \frac{1}{a+1} + l\frac{3}{2} - \frac{1}{a+2} + l\frac{4}{3} - \ldots$$
$$\ldots - \frac{1}{a+\mu} + l\frac{\mu+2}{\mu+1} - \ldots,$$

la série se prolongeant indéfiniment, puisque μ doit croître sans limite.

Si l'on remplace a successivement par $\frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \frac{q-1}{q}, \ldots, \frac{q}{q}$, on aura

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
\psi\left(\frac{1}{q}\right) &= -q + l2 - \frac{q}{q+1} + l\frac{3}{2} - \frac{q}{2q+1} + l\frac{4}{3} - \ldots,\\
\psi\left(\frac{2}{q}\right) &= -\frac{q}{2} + l2 - \frac{q}{q+2} + l\frac{3}{2} - \frac{q}{2q+2} + l\frac{4}{3} - \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\psi\left(\frac{q-1}{q}\right) &= -\frac{q}{q-1} + l2 - \frac{q}{q+q-1}\\
&\qquad + l\frac{3}{2} - \frac{q}{2q+q-1} + l\frac{4}{3} - \ldots,\\
\psi(1) &= -1 + l2 - \frac{1}{2} + l\frac{3}{2} - \frac{1}{3} + l\frac{4}{3} - \ldots.
\end{aligned}\right.$$

Posons $\frac{2\pi}{q} = \omega$, et désignons par φ l'un quelconque des angles ω, $2\omega \ldots, (q-1)\omega, q\omega$, on aura

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}
1 &= \cos q\varphi &&= \cos 2q\varphi &&= \ldots,\\
\cos\varphi &= \cos(q+1)\varphi &&= \cos(q+2)\varphi &&= \ldots,\\
\cos 2\varphi &= \cos(q+2)\varphi &&= \cos(2q+2)\varphi &&= \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\cos\varphi &+ \cos 2\varphi + \ldots + \cos(q-1)\varphi + 1 = 0.
\end{aligned}\right.$$

De plus on déduit aisément de la dernière de ces équations la formule

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &1+\cos p\omega\cos k\omega+\cos 2p\omega\cos 2k\omega+\dots\\ &\qquad\dots+\cos(q-1)p\omega\cos(q-1)k\omega=0,\end{aligned}\right.$$

k désignant un des nombres $1, 2, 3\dots, q-1$, à l'exception de p et de $q-p$, pour lesquels la somme est $\frac{1}{2}q$.

Les équations (1) peuvent s'écrire, en tenant compte des relations (2),

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\cos\varphi\,\psi\left(\frac{1}{q}\right)=-q\cos\varphi+\cos\varphi\, l2\\ &\qquad\qquad -\frac{q}{q+1}\cos(q+1)\varphi+\cos\varphi\, l\frac{3}{2}-\dots,\\ &\cos 2\varphi\,\psi\left(\frac{2}{q}\right)=-\frac{q}{2}\cos 2\varphi+\cos 2\varphi\, l2\\ &\qquad\qquad -\frac{q}{q+2}\cos(q+2)\varphi+\cos 2\varphi\, l\frac{3}{2}-\dots,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &\cos(q-1)\varphi\,\psi\left(\frac{q-1}{q}\right)=-\frac{q}{q-1}\cos(q-1)\varphi+\cos(q-1)\varphi\, l2\\ &\qquad\qquad -\frac{q}{2q-1}\cos(2q-1)\varphi+\cos(q-1)\varphi\, l\frac{3}{2}-\dots,\\ &\psi(1)=-\frac{q}{q}\cos q\varphi+l2-\frac{q}{2q}\cos 2q\varphi+l\frac{3}{2}-\dots,\end{aligned}\right.$$

et en ajoutant toutes ces équations membre à membre, on a

$$\begin{aligned}\cos\varphi\,\psi\left(\frac{1}{q}\right)+\cos 2\varphi\,\psi\left(\frac{2}{q}\right)+\dots+\cos(q-1)\varphi\,\psi\left(\frac{q-1}{q}\right)+\psi(1)\\ =-q\left(\cos\varphi+\frac{1}{2}\cos 2\varphi+\dots+\frac{1}{n}\cos n\varphi+\dots\right),\end{aligned}$$

la série qui paraît entre parenthèses dans le second membre étant prolongée indéfiniment. Dans la somme, en effet, chacun des logarithmes a pour facteur la somme

$$\cos\varphi+\cos 2\varphi+\dots+\cos(q-1)\varphi+1$$

qui est nulle; de plus, le terme $-\frac{q}{kq+i}\cos(kq+i)\varphi$ $=-\frac{q}{kq+i}\cos i\varphi$ se présente une fois et une seule, il provient du $(2k+1)^{\text{ième}}$ terme de la $i^{\text{ième}}$ ligne.

Le développement en série du second membre se trouve facilement sous forme finie; si dans la formule

$$l(1-z)=-\left(\frac{z}{1}+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\ldots\right)$$

on pose

$$z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

et que l'on égale les parties réelles des deux membres, on trouve

$$\frac{1}{2}l(1-2\rho\cos\varphi+\rho^2)=-\left(\rho\cos\varphi+\frac{\rho^2}{2}\cos 2\varphi+\ldots\right).$$

En faisant $\rho=1$ et substituant dans la formule établie précédemment, on a donc

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}&\cos\varphi\,\psi\left(\frac{1}{q}\right)+\cos 2\varphi\,\psi\left(\frac{2}{q}\right)+\ldots+\cos(q-1)\varphi\,\psi\left(\frac{q-1}{q}\right)\\&\qquad\qquad=-\psi(1)+\frac{1}{2}l(2-2\cos\varphi).\end{aligned}\right.$$

On obtiendra $q-1$ équations du premier degré entre les quantités $\psi\left(\frac{1}{q}\right), \psi\left(\frac{2}{q}\right),\ldots,\psi\left(\frac{q-1}{q}\right)$ en donnant à φ les valeurs successives $\varphi=\omega$, $\varphi=2\omega$, ..., $\varphi=(q-1)\omega$. Ces équations se résolvent facilement.

Il suffit, en effet, de multiplier les deux membres de chacune de ces équations respectivement par $\cos p\omega$, $\cos 2p\omega$, ..., $\cos(q-1)p\omega$ et de les ajouter membre à membre en leur adjoignant l'équation obtenue en faisant, dans la relation de Gauss entre les fonctions ψ, $a=\frac{1}{q}$, $n=q$ ce qui donne

$$(6)\quad \psi\left(\frac{1}{q}\right)+\psi\left(\frac{2}{q}\right)+\ldots+\psi\left(\frac{q-1}{q}\right)=-\psi(1)+q\psi(1)-q\,l q;$$

on trouve, après avoir divisé par $\frac{q}{2}$,

$$(7)\quad \begin{cases} \psi\left(\frac{q-p}{q}\right)+\psi\left(\frac{p}{q}\right)=2\psi(1)-2lq+\cos p\omega\, l(2-2\cos\omega) \\ \qquad +\cos 2p\omega\, l(2-2\cos 2\omega)+\ldots \\ \qquad +\cos(q-1)p\omega\, l[2-2\cos(q-1)\omega]. \end{cases}$$

On voit que le dernier terme de cette équation est égal à $\cos p\,\omega\, l(2-2\cos\omega)$, l'avant-dernier à $\cos 2p\,\omega\, l(2-2\cos 2\,\omega)$, etc., en sorte que les termes sont égaux deux à deux, excepté dans le cas où q est pair; il y a alors un terme du milieu

$$\cos\frac{q}{2}p\omega l\left(2-2\cos\frac{q}{2}\omega\right)$$

égal à $2l2$ si p est pair, à $-2l2$ si p est impair.

D'autre part, la relation des compléments relative aux fonctions ψ

$$\psi(a)-\psi(1-a)=-\pi\cot a\pi$$

devient, si l'on y fait $a=\frac{p}{q}$,

$$(8)\qquad \psi\left(\frac{q-p}{q}\right)-\psi\left(\frac{p}{q}\right)=\pi\cot\frac{p\pi}{q}.$$

Les équations (7) et (8) fournissent maintenant $\psi\left(\frac{p}{q}\right)$ et $\psi\left(\frac{p-q}{q}\right)$.

Pour une valeur impaire de q, en supposant p plus petit que q, on a

$$(9)\quad \begin{cases} \psi\left(\frac{p}{q}\right)=\psi(1)-\frac{\pi}{2}\cot\frac{p\pi}{q}-lq+\cos\frac{2p\pi}{q}\, l\left(2-2\cos\frac{2\pi}{q}\right) \\ \qquad +\cos\frac{4p\pi}{q}\, l\left(2-2\cos\frac{4\pi}{q}\right)+\ldots \\ \qquad +\cos\frac{(q-1)p\pi}{q}\, l\left(2-2\cos\frac{(q-1)\pi}{q}\right); \end{cases}$$

lorsque q est pair, on a

$$(10)\quad \begin{cases} \psi\left(\frac{p}{q}\right) = \psi(1) - \frac{\pi}{2}\cot\frac{p\pi}{q} - lq + \cos\frac{2p\pi}{q}\, l\left(2-2\cos\frac{2\pi}{q}\right) \\ \qquad + \cos\frac{4p\pi}{q}\, l\left(2-2\cos\frac{4\pi}{q}\right) + \ldots \\ \qquad + \cos\frac{(q-2)p\pi}{q}\, l\left(2-2\cos\frac{(q-2)\pi}{q}\right) \pm l2, \end{cases}$$

le signe + s'applique si p est pair, le signe — si p est impair.

On trouve de cette manière

$$(11)\quad \begin{cases} \psi\left(\frac{3}{4}\right) = \psi(1) + \frac{1}{2}\pi - 3l2, \\ \psi\left(\frac{1}{4}\right) = \psi(1) - \frac{1}{2}\pi - 3l2, \\ \psi\left(\frac{2}{3}\right) = \psi(1) + \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{1}{3}} - \frac{3}{2}l3, \\ \psi\left(\frac{1}{3}\right) = \psi(1) - \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{1}{3}} - \frac{3}{2}l3. \end{cases}$$

La formule (8) implique la condition $p<q$, remarquons cependant que la formule

$$\psi(a+n) = \psi(a) + \frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} + \ldots + \frac{1}{a+n-1}$$

permet d'étendre les résultats trouvés aux valeurs de l'argument supérieures à l'unité.

C'est à Gauss (*Werke*, t. III, p. 155) que l'on doit cette détermination élégante $\psi\left(\frac{p}{q}\right)$.

§ **10.** Nous avons représenté précédemment $\psi(x) - \psi(1)$ par une intégrale définie; on peut exprimer $\psi(x)$ de la même manière sans introduire la transcendante $\psi(1)$.

Reprenons la formule

$$(1)\quad \psi(x)=\int_0^1 \frac{1-z^{x-1}}{1-z}\,dz+\lim\left[\int_0^1\left(\frac{z^{x+\mu-1}}{1-z}-\frac{\mu z^{\mu-1}}{1-z^{\mu}}\right)dz\right]_{\mu=\infty};$$

dans la première intégrale, remplaçons z par z^{μ}, elle devient :

$$\mu\int_0^1 \frac{z^{\mu-1}-z^{\mu x-1}}{1-z^{\mu}}\,dz;$$

et l'on peut alors écrire

$$\psi(x)=\lim\left[\int_0^1\left(\frac{z^{x+\mu-1}}{1-z}-\frac{\mu z^{\mu x-1}}{1-z^{\mu}}\right)dz\right]_{\mu=\infty}.$$

Posons maintenant $z^{\mu}=u$, et il viendra

$$\psi(x)=\lim\left[\int_0^1\left(\frac{u^{\frac{x}{\mu}+1-\frac{1}{\mu}}}{1-u^{\frac{1}{\mu}}}-\frac{\mu u^{x-\frac{1}{\mu}}}{1-u}\right)\frac{1}{\mu}u^{\frac{1}{\mu}-1}\,du\right],$$

ou bien

$$\psi(x)=\lim\left[\int_0^1\left(\frac{u^{\frac{x}{\mu}}}{\mu\left(1-u^{\frac{1}{\mu}}\right)}-\frac{u^{x-1}}{1-u}\right)du\right].$$

Or, lorsque μ augmente indéfiniment, l'expression $\mu\left(1-u^{\frac{1}{\mu}}\right)$ a pour limite $-lu$ et $u^{\frac{x}{\mu}}$ a pour limite l'unité; on a donc enfin

$$(2)\qquad \psi(x)=-\int_0^1\left(\frac{1}{lu}+\frac{u^{x-1}}{1-u}\right)du.$$

Cette expression de $\psi(x)$ et la méthode qui y conduit sont dues à Gauss (*Werke*, t. III, p. 158).

On emploie souvent une autre expression de la fonction $\psi(a)$ obtenue en partant de la représentation de $\Gamma(a)$ par une intégrale définie.

On a

$$(3)\qquad \Gamma(a)=\int_0^{\infty} e^{-x}x^{a-1}\,dx,$$

et par suite

$$(4)\qquad \frac{d\Gamma(a)}{da}=\int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}lx\,dx.$$

Or, si l'on pose

$$(5)\qquad u=\int_0^\infty \frac{e^{-z}-e^{-zx}}{z}\,dz,$$

on a

$$\frac{du}{dx}=\int_0^\infty e^{-zx}dz=\frac{1}{x},$$
$$u=lcx,$$

et, en faisant $x=1$ dans la formule (3), on voit que $c=1$, et on a

$$(6)\qquad lx=\int_0^\infty \frac{e^{-z}-e^{-zx}}{z}\,dz;$$

en sorte que la formule (2) peut s'écrire

$$\frac{d\Gamma(a)}{da}=\int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}\,dx\int_0^\infty \frac{e^{-z}-e^{-zx}}{z}\,dz,$$

ou bien, en changeant l'ordre des intégrations,

$$\frac{d\Gamma(a)}{da}=\int_0^\infty \frac{dz}{z}\left[e^{-z}\int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}\,dx-\int_0^\infty e^{-(1+z)x}x^{a-1}\,dx\right],$$

c'est-à-dire

$$\frac{d\Gamma(a)}{da}=\Gamma(a)\int_0^\infty\left(e^{-z}-\frac{1}{(1+z)^a}\right)\frac{dz}{z},$$

et l'on peut écrire

$$(7)\qquad \frac{dl\Gamma(a)}{da}=\psi(a)=\int_0^\infty\left(e^{-z}-\frac{1}{(1+z)^a}\right)dz.$$

Si l'on intègre les deux membres de cette équation entre les limites 1 et a, en remarquant que $l\Gamma(1)=0$, on en déduit :

$$l\Gamma(a)=\int_0^\infty\left[(a-1)e^{-z}-\frac{(1+z)^{-1}-(1+z)^{-a}}{l(1+z)}\right]\frac{dz}{z}.$$

Or cette formule peut se simplifier. Remarquons en effet que l'on a

$$\Gamma(2) = 1, \qquad l\Gamma(2) = 0,$$

et par suite

$$0 = \int_0^\infty \left(e^{-z} - \frac{(1+z)^{-1} - (1+z)^{-2}}{l(1+z)}\right)\frac{dz}{z},$$

$$0 = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-z}}{z} - \frac{(1+z)^{-2}}{l(1+z)}\right) dz.$$

Multiplions les deux membres de cette identité par $(a-1)$ et retranchons membre à membre de l'expression trouvée pour $l\Gamma(a)$, il vient

$$l\Gamma(a) = \int_0^\infty \left[(a-1)(1+z)^{-2} - \frac{(1+z)^{-1} - (1+z)^{-a}}{z}\right]\frac{dz}{l(1+z)}.$$

Si l'on pose

$$l(1+z) = v,$$

on a

$$(8) \qquad l\Gamma(a) = \int_0^\infty \left[(a-1)e^{-v} - \frac{e^{-v} - e^{-va}}{1-e^{-v}}\right]\frac{dv}{v}.$$

On en déduit une nouvelle expression de $\psi(a)$ en différentiant par rapport à a:

$$(9) \qquad \frac{dl\Gamma(a)}{da} = \psi(a) = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-v}}{v} - \frac{e^{-va}}{1-e^{-v}}\right) dv.$$

Si dans l'équation (8) on pose $e^{-v} = z$, on obtient

$$(10) \qquad l\Gamma(a) = \int_0^1 \left(\frac{1-z^{a-1}}{1-z} - a + 1\right)\frac{dz}{lz}.$$

L'expression de $\psi(a)$ sous forme d'intégrale définie donnée par la formule (7) est due à Lejeune-Dirichlet (*J. de Cr.*, t. XV, p. 260). Voir aussi

Grunert, *Gr. Arch.*, t. II, p. 266.

Schlömilch, *Studien*, t. I, p. 4.

Lejeune-Dirichlet donne aussi la formule

$$\psi(a) = \int_0^1 \left(e^{1-\frac{1}{x}} - x^a\right) \frac{dx}{x(1-x)}.$$

La formule (8) est de Malmsten (*J. de Cr.*, t. XXXV, p. 55). Gauss avait tiré la formule (9) de la formule (2) (*Werke*, t. III, p. 160). Pour la démonstration que nous avons donnée, voir Schlömilch (*Studien*, t. I, p. 10) et Schaar (*Mém. cour. de Brux.*, t. XXII).

A toute expression de $\psi(a)$ par une intégrale définie correspond une expression semblable de $\psi(1)$ et par suite de la constante d'Euler.

L'équation

$$(11) \qquad l\Gamma(a) = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-ax} - e^{-x}}{1 - e^{-x}} + (a-1)e^{-x}\right) \frac{dx}{x}$$

donne

$$l\Gamma(1-a) = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-(1-a)x} - e^{-x}}{1 - e^{-x}} - ae^{-x}\right) \frac{dx}{x},$$

que l'on peut écrire, en tenant compte de la relation des compléments,

$$(12) \quad l\Gamma(a) - l\pi + l\sin a\pi = -\int_0^\infty \left(\frac{e^{-(1-a)x} - e^{-x}}{1 - e^{-x}} - ae^{-x}\right) \frac{dx}{x}.$$

En ajoutant membre à membre les équations (1) et (2), il vient

$$2l\Gamma(a) - l\pi + l\sin a\pi = \int_0^\infty \left[\frac{e^{\left(\frac{1}{2}-a\right)x} - e^{-\left(\frac{1}{2}-a\right)x}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}} - (1-2a)e^{-x}\right] \frac{dx}{x},$$

et le second membre se prête à un développement remarquable.

Pour α quelconque et ω compris entre $-\pi$ et $+\pi$, on a

$$(13) \quad \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}\dfrac{e^{\alpha\omega} - e^{-\alpha\omega}}{e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi}} = \dfrac{1 \sin\omega}{\alpha^2 + 1^2} - \dfrac{2\sin 2\omega}{\alpha^2 + 2^2} + \dfrac{3\sin 3\omega}{\alpha^2 + 3^2} - \ldots, \\[2ex] \dfrac{\omega}{2} = \dfrac{\sin\omega}{1} - \dfrac{\sin 2\omega}{2} + \dfrac{\sin 3\omega}{3} - \ldots. \end{cases}$$

En posant $a = \frac{x}{2\pi}$ et $\omega = (1-2a)\pi$, on obtient

$$\frac{e^{\left(\frac{1}{2}-a\right)x} - e^{-\left(\frac{1}{2}-a\right)x}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}} = 4\left(\frac{2\pi \sin 2a\pi}{x^2+(2\pi)^2} + \frac{4\pi \sin 4a\pi}{x^2+(4\pi)^2} + \frac{6\pi \sin 6a\pi}{x^2+(6\pi)^2} + \ldots\right)$$

$$1-2a = 4\left(\frac{\sin 2a\pi}{2\pi} + \frac{\sin 4a\pi}{4\pi} + \frac{\sin 6a\pi}{6\pi} + \ldots\right),$$

formules valables pour x quelconque et a compris entre zéro et un.

On trouve alors par substitution

$$\begin{aligned} 2l\Gamma(a) - l\pi + l\sin a\pi \\ &= 4(b_2 \sin 2a\pi + b_4 \sin 4a\pi + b_6 \sin 6a\pi + \ldots),\end{aligned}$$

en posant

$$b_{2n} = \int_0^\infty \left(\frac{2n\pi}{x^2+(2n\pi)^2} - \frac{e^{-x}}{2n\pi}\right)\frac{dx}{x}.$$

Or, on peut écrire

$$b_{2n} = \frac{1}{2n\pi}\left[\int_0^\infty \left(\frac{1}{1+x} - \frac{x}{4n^2\pi^2+x^2}\right)\frac{dx}{x} + \int_0^\infty \left(\frac{1}{1+x} - e^{-x}\right)\frac{dx}{x}\right].$$

La première intégrale placée entre parenthèses est, comme on le vérifie facilement, égale à $l(2n\pi)$; quant à la seconde, elle est égale à $-\psi(1)$ ou γ.

On a donc

$$b_{2n} = \frac{1}{2n\pi}\left[l(2n\pi) + \gamma\right],$$

et il vient

$$\begin{aligned} l\Gamma(a) - \frac{1}{2}l\pi + \frac{1}{2}l\sin a\pi &= \frac{l(2\pi)+\gamma}{\pi}\sin 2a\pi \\ &+ \frac{l(4\pi)+\gamma}{2\pi}\sin 4a\pi + \ldots,\end{aligned}$$

ou bien, en remarquant que l'on a, d'après la formule (13),

$$\frac{l\pi+\gamma}{\pi}\sin 2a\pi + \frac{l\pi+\gamma}{2\pi}\sin 4a\pi + \ldots = \left(\frac{1}{2}-a\right)(l\pi+\gamma).$$

on a la formule

$$(14)\ l\Gamma(a) = (1-a)l\pi + \gamma\left(\frac{1}{2} - a\right) - \frac{1}{2}l\sin a\pi + \frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty}\frac{l2n}{n}\sin 2na\pi.$$

Ce développement de $l\,\Gamma\,(a)$ a été domné par Kummer (*J. de Cr.*, t. XXXV, p. 1), par une méthode bien différente de la précédente. Le procédé que nous avons employé pour y parvenir est dû à Schlömilch (*Compendium*, t. II, p. 255). Gilbert en a donné une autre démonstration (*Mém. Ac. Belg*,, t, XLI, p. 16). Cette série a conservé le nom de ***série de Kummer***.

§ **11.** Nous avons déjà trouvé précédemment plusieurs développements en série de la fonction $l\,\Gamma\,(a)$. Les expressions sous forme d'intégrale définie que nous avons obtenues nous conduisent à des développements nouveaux, mais il nous sera utile tout d'abord de nous occuper de l'évaluation approchée de la fonction gamma quand l'argument est un grand nombre.

Nous partirons à cet effet de la formule de Wallis

$$(1)\qquad \frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\,\frac{2}{3}\,\frac{4}{3}\,\frac{4}{5}\cdots\frac{2a}{2a-1}\,\frac{2a}{2a+1}\cdots,$$

où a est un nombre entier.

On peut écrire

$$\frac{\pi}{2} = \lim \frac{(2.4.6\ldots 2a)^2}{(1.3.5\ldots 2a-1)^2\,(2a+1)}$$
$$= \lim 2^{2a}\frac{(1.2.3\ldots a)^2\,[2.4\ldots(2a-2)2a]^2}{(1.2.3\ldots 2a)^2\,(2a+1)}$$
$$= \lim 2^{4a}\frac{(a!)^4}{(2a!)^2\,(2a+1)}.$$

Si l'on pose

$$(2)\qquad \varphi(a) = \frac{a!}{\sqrt{2\pi}\,e^{-a}\,a^{a+\frac{1}{2}}},$$

on voit alors facilement que la formule (1) équivaut à la suivante :

$$\lim \frac{[\varphi(a)]^2}{\varphi(2a)} = 1. \tag{3}$$

D'autre part on peut voir directement que l'on a aussi

$$\lim \frac{\varphi(a)}{\varphi(2a)} = 1. \tag{4}$$

La formule (2) donne

$$\frac{\varphi(a)}{\varphi(a+1)} = e^{-1}\left(1 + \frac{1}{a}\right)^{a+\frac{1}{2}} = e^{-1+\left(a+\frac{1}{2}\right)l\left(1+\frac{1}{a}\right)},$$

ou bien, en prenant les logarithmes,

$$l\frac{\varphi(a)}{\varphi(a+1)} = -1 + \left(a + \frac{1}{2}\right) l\left(1 + \frac{1}{a}\right);$$

a étant supposé plus grand que 1, on aura

$$l\left(1 + \frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a} - \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{3a^3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{na^n} - \dots,$$

d'où

$$\left(a + \frac{1}{2}\right) l\left(1 + \frac{1}{a}\right) = 1 + \frac{1}{12a^2} - \frac{1}{12a^3} + \dots, + \frac{n-1}{2n(n+1)} \frac{(-1)^n}{a^n} + \dots,$$

donc

$$l\frac{\varphi(a)}{\varphi(a+1)} = \frac{1}{12a^2} - \frac{1}{12a^3} + \dots + \frac{n-1}{2n(n+1)} \frac{(-1)^n}{a^n} + \dots. \tag{5}$$

Dans cette série les termes sont alternativement positifs et négatifs; la valeur absolue du rapport du terme de rang n au précédent est

$$\frac{n^2}{n^2+n-2} \frac{1}{a},$$

et par suite est égal à $\frac{1}{a}$ pour $n = 2$ et inférieur à $\frac{1}{a}$ pour toute valeur de n supérieure à 2; donc, lors même que a se réduirait

à 1, les valeurs absolues des termes de la série (11) vont en décroissant à partir du deuxième. On a donc évidemment

$$l\frac{\varphi(a)}{\varphi(a+1)} < \frac{1}{12a^2}$$

ou bien

(6) $$\frac{\varphi(a)}{\varphi(a+1)} < e^{\frac{1}{12a^2}}.$$

On peut écrire

(7) $$\frac{\varphi(a)}{\varphi(a+1)} = e^{\frac{\theta_0}{a^2}},$$

θ_0 étant un nombre positif et inférieur à $\frac{1}{12}$. On obtient en changeant a en $a+1$, $a+2$,... $2a-1$ et en désignant par θ_1, θ_2,... θ_{a-1} des quantités positives comprises entre 0 et 1,

(8) $$\left\{\begin{aligned} &\frac{\varphi(a+1)}{\varphi(a+2)} = e^{\frac{\theta_1}{(a+1)^2}}, \\ &\frac{\varphi(a+2)}{\varphi(a+3)} = e^{\frac{\theta_2}{(a+2)^2}}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\frac{\varphi(2a-1)}{\varphi(2a)} = e^{\frac{\theta_{a-1}}{(2a-1)^2}}. \end{aligned}\right.$$

Multiplions membre à membre les égalités (7) et (8), la somme des fractions

$$\frac{\theta_0}{a^2} + \frac{\theta_1}{(a+1)^2} + \frac{\theta_2}{(a+2)^2} + \dots + \frac{\theta_{a-1}}{(2a-1)^2}$$

est moindre que $\frac{1}{12a^2}a$ ou que $\frac{1}{12a}$, on aura donc

$$\frac{\varphi(a)}{\varphi(2a)} = e^{\frac{\theta}{a}},$$

en désignant par θ un nombre compris entre 0 et $\frac{1}{12}$, et par suite

$$\lim\left[\frac{\varphi(a)}{\varphi(2a)}\right]_{a=\infty} = 1,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Comparons maintenant les formles (3) et (4), il vient

(9) $$\lim \varphi(a)_{a=\infty} = 1,$$

ou bien, par la définition de $\varphi(a)$,

(10) $$a! = \Gamma(a+1) = \sqrt{2\pi} e^{-a} a^{a+\frac{1}{2}} (1+\varepsilon),$$

ε étant une quantité positive qui s'annule pour $a = \infty$.

On voit donc que, a étant un nombre entier, on a pour de grandes valeurs de a la valeur approchée

$$\Gamma(a) = \sqrt{2\pi}\, e^{-a}\, a^{a-\frac{1}{2}}.$$

Les considérations qui précèdent peuvent nous fournir un développement de $l\Gamma(a+1)$ lorsque a est entier. On a d'abord

(11) $$l\Gamma(a+1) = \frac{1}{2}\, l2\pi - a + \left(a+\frac{1}{2}\right) la + l\varphi(a).$$

Or, en employant une méthode dont nous avons déjà rencontré bien des applications, on a identiquement

$$l\varphi(a) = l\,\frac{\varphi(a)}{\varphi(a+1)} + l\,\frac{\varphi(a+1)}{\varphi(a+2)} + \dots$$
$$+ l\,\frac{\varphi(a+n)}{\varphi(a+n+1)} + l\varphi(a+n+1).$$

Si l'entier n augmente indéfiniment, $\varphi(a+n+1)$ a pour limite l'unité et son logarithme a pour limite zéro. On a donc

(12) $$l\varphi(a) = \sum_0^\infty l\,\frac{\varphi(a+n)}{\varphi(a+n+1)},$$

ou bien, d'après la formule

$$l\varphi(a) = \sum_0^\infty \left[\left(a+n+\frac{1}{2}\right) l\left(1+\frac{1}{a+n}\right) - 1\right],$$

et l'on a par suite

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} l\Gamma(a+1) &= \frac{1}{2}\,l2\pi - a + \left(a+\frac{1}{2}\right)la \\ &+ \sum_0^\infty \left[\left(a+n+\frac{1}{2}\right) l\left(1+\frac{1}{a+n}\right) - 1\right]. \end{aligned}\right.$$

Cette formule se trouve établie seulement pour les valeurs entières de a; mais le second membre a encore une signification quelle que soit la valeur attribuée à a, si l'on excepte toutefois le cas où a est nul ou égal à un entier négatif. En effet, la série qui figure dans cette formule est toujours convergente, car ses termes, comme il est aisé de s'en assurer en développant $l\left(1+\frac{1}{a+n}\right)$ décroissent comme ceux de la série convergente $\Sigma\,\frac{1}{n^2}$.

Pour démontrer que la formule (13) subsiste quel que soit a, il suffit de voir que cette formule coïncide avec celle qui nous a servi lorsqu'il s'est agi d'établir que la définition de Gauss par un produit infini s'appliquait à toute valeur de l'argument. Nous avons vu alors que l'on avait

$$(14)\quad l\Gamma(a+1) = \sum_0^\infty \left[a\,l\left(1+\frac{1}{n+1}\right) - l\left(1+\frac{a}{n+1}\right)\right].$$

Or si l'on prend les dérivées secondes par rapport à a des membres de chacune des équations (13) et (14), on obtient dans les deux cas

$$(15)\quad \frac{d^2\,l\Gamma(a+1)}{da^2} = \sum_0^\infty \frac{1}{(a+n+1)^2}.$$

Les dérivées secondes des seconds membres des deux formules étant égales, ces seconds membres ne peuvent différer que par une fonction linéaire de a. Comme ils sont égaux pour toute valeur entière et positive de a, leur différence se réduit nécessairement à zéro.

La formule (11) est donc vraie, quelle que soit la valeur de

l'argument a, $l\varphi(a)$ a encore alors d'après la formule (9) pour limite zéro lorsque a augmente indéfiniment; on a donc toujours pour valeur approchée de $\Gamma(a+1)$, que a soit entier ou non, pourvu qu'il soit très grand et positif,

$$\Gamma(a+1) = \sqrt{2\pi}\, e^{-a} a^{a+\frac{1}{2}}.$$

Stirling s'est occupé le premier de la détermination de $l\,(1.2.3...a)$ pour a très grand, ou plus généralement de la détermination de $l[a(a+r)...(a+nr)]$, n étant supposé considérable.

Après lui, Euler et Legendre (*Exerc.*, t. I, p. 340 et t. I, p. 350) ont donné des démonstrations de la formule (10), mais les procédés qu'ils ont employés ne présentaient pas la rigueur que l'on était en droit d'exiger. Aussi les géomètres sont-ils revenus après eux en maintes occasions sur cette question.

Cauchy, *Exerc. d'An. et de Ph.* t. II.

Liouville, *C. R.*, t. IX, p. 105. — *Liou. J.*, t. IV, p. 317.

Binet, *J. Ec. Pol.*, cah. XXVII, 3e p.

— *C. R.*, t. IX, p. 156.

Raabe, *J. de Cr.*, t. XXV, p. 147; t. XXVIII, p. 10.

Malmsten, *J. de Cr.*, t. XXXV.

Mais la démonstration si simple que nous avons donnée est due à Serret (*Cal. D. et I.*, t. II). Déjà avant lui Legendre avait signalé l'importance de la formule dans l'évaluation approchée de la fonction Γ (*Exerc.*, t. I, p. 350).

La valeur approchée de $\Gamma(a)$ conduit à une démonstration élégante, donnée par Cauchy, de la relation de Gauss. Ecrivons cette relation sous la forme

$$n^{na}\,\frac{\Gamma(a)\,\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma(na)} = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\, n^{\frac{1}{2}}.$$

L'équation

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$$

montre que le premier membre ne varie pas quand on fait croître a d'une unité; il ne variera donc pas non plus si l'on ajoute à a autant d'unités qu'on voudra et si par ce moyen on fait croître a au delà de toute limite; on pourra alors remplacer dans le premier membre chaque fonction gamma par sa valeur approchée. Le premier membre devient ainsi, après des réductions évidentes,

$$(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{n-1}{2}} \left(1+\frac{1}{na}\right)^{a+\frac{1}{n}-\frac{1}{2}} \left(1+\frac{2}{na}\right)^{a+\frac{2}{n}-\frac{1}{2}} \cdots \left(1+\frac{n-1}{na}\right)^{a+\frac{n-1}{n}-\frac{1}{2}}.$$

Si l'on fait

$$P = \left(1+\frac{1}{na}\right)^{a+\frac{1}{n}-\frac{1}{2}} \left(1+\frac{2}{na}\right)^{a+\frac{2}{n}-\frac{1}{2}} \cdots \left(1+\frac{n-1}{na}\right)^{a+\frac{n-1}{n}-\frac{1}{2}},$$

$$lP = \left(a+\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\right) l\left(1+\frac{1}{na}\right) + \ldots + \left(a+\frac{n-1}{n}-\frac{1}{2}\right) l\left(1+\frac{n-1}{na}\right),$$

et si l'on développe en série les logarithmes qui entrent dans le second membre, il vient, en ne prenant que les termes qui ne s'annulent pas pour a infiniment grand,

$$lP = \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \ldots + \frac{n-1}{n} = \frac{n-1}{2},$$

$$P = e^{\frac{n-1}{2}}.$$

Substituant cette valeur de P, la formule (1) est démontrée.

La relation de Gauss permet, lorsqu'on y fait croître n indéfiniment, de calculer l'intégrale

$$\int_a^{a+1} l\Gamma(a)\,da.$$

On a, en effet, en posant $n\,da = 1$,

$$\int_a^{a+1} l\Gamma(a)\,da = \lim da \left\{ l\Gamma(a) + l\Gamma(a+da) + \ldots + l\Gamma[a+(n-1)da] \right\},$$

c'est-à-dire

$$\int_a^{a+1} l\Gamma(a)\,da = \lim da\, l\{\Gamma(a)\Gamma(a+da) + \ldots + \Gamma[a+(n-1)da]\};$$

or, puisque $da = \frac{1}{n}$, la relation de Gauss donne

$$\Gamma(a)\Gamma(a+da)\,\ldots\,\Gamma[a+(n-1)da] = \Gamma(na)n^{-na}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}n^{\frac{1}{2}};$$

par conséquent

$$\int_a^{a+1} l\Gamma(a)\,da = \lim da\left[l\Gamma(na) - na\,ln + \frac{n-1}{2}\,l2\pi + \frac{1}{2}\,ln\right].$$

Mais on a, à cause de $n\,da = 1$,

$$\lim da\,\frac{n-1}{2}\,l2\pi = \frac{1}{2}\,l2\pi,$$

$$\lim \frac{1}{2}\,da\,ln = 0.$$

D'ailleurs, n étant infiniment grand,

$$\Gamma(na) = \sqrt{2\pi}\,e^{-na}(na)^{na-\frac{1}{2}},$$

$$l\Gamma(na) = l\sqrt{2\pi} - na + \left(na - \frac{1}{2}\right)lna,$$

$$l\Gamma(na) - na\,ln = l\sqrt{2\pi} - na + na\,la - \frac{1}{2}\,la - \frac{1}{2}\,ln,$$

$$\lim da\,[l\Gamma(na) - na\,ln] = -a + a\,la,$$

et par conséquent enfin

$$\int_a^{a+1} l\Gamma(a)\,da = \frac{1}{2}\,l2\pi + a\,la - a.$$

L'intégrale à laquelle nous venons de parvenir a été donnée par Raabe.

La même formule a été depuis démontrée bien des fois.

Malmsten, *J. de Cr.*, t. XXXV, p. 75.

Björling, *Overs. Stock. Förh.*, 1856, p. 181.

Bierens de Haan (*Arch. Néerl.*, VIII, p. 135. — *Verslagen en Med.*, VII$_2$, p. 12) a obtenu la même formule en partant de l'expression

$$\frac{1}{q^p}\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-qx} x^{p-1}\,dx;$$

il arrive en même temps à la formule

$$\int_0^1 l\Gamma(ax)\,dx = \frac{1}{2}\,l2\pi - \frac{a-1}{2} + \frac{1}{a}\sum_{n=2}^{n=a-1} n\,l\,n.$$

Liebrecht (*Grun. Arch.*, t. LIX, p. 218) l'obtient en déterminant

$$\lim_{n=\infty}\left[\frac{1}{n}\,l\Gamma(na) - a\,l\,n\right].$$

Lorsque n est considérable, on a, d'après ce qui précède,

$$\Gamma(a+n) = \sqrt{2\pi}\,e^{-a-n}(a+n)^{a+n-\frac{1}{2}}.$$

Mais on a identiquement

$$(a+n)^{a+n-\frac{1}{2}} = n^{a+n-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n\left(1+\frac{a}{n}\right)^{a-\frac{1}{2}},$$

et lorsque n augmente indéfiniment, le second facteur a une limite égale à e^a et le troisième a une limite égale à l'unité. On peut donc écrire

$$\Gamma(a+n) = \sqrt{2\pi}\,e^{-n}\,n^{n-\frac{1}{2}}\,n^a,$$

ou bien

$$\lim\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(n)\,n^a} = 1.$$

Or, en ce qui concerne les fonctions $P(a)$ et $Q(a)$ (§ 5), on a immédiatement

$$\lim\frac{P(a+n)}{\Gamma(n)\,n^a} = 0.$$

et l'équation

$$\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(n)n^a} = \frac{P(a+n)}{\Gamma(n)n^a} + \frac{Q(a+n)}{\Gamma(n)n^a}$$

donne

$$\lim \frac{Q(a+n)}{\Gamma(n)n^a} = 1.$$

Il est facile, avec ce qui précède, et en tenant compte des relations auxquelles satisfont les fonctions P et Q, de former une fonction S définie par les deux équations

$$S(a+1) = aS(a) + l,$$
$$\lim \frac{S(a+n)}{\Gamma(n)n^a} = k.$$

La première relation donne

$$S(a) = \frac{1}{a} S(a+1) - \frac{l}{a},$$
$$S(a+1) = \frac{1}{a+1} S(a+2) - \frac{l}{a+1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$S(a+n) = \frac{1}{a+n} S(a+n+1) - \frac{l}{a+n}.$$

Multiplions ces égalités respectivement par

$$1, \quad \frac{1}{a}, \quad \frac{1}{a(a+1)}, \quad \cdots \quad \frac{1}{a(a+1)\ldots(a+n-1)},$$

il vient, en ajoutant membre à membre,

$$S(a) = \frac{S(a+n+1)}{a(a+1)\ldots(a+n)} - l\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{a(a+1)} + \ldots + \frac{1}{a(a+1)(a+n)}\right]$$
$$= n^a \frac{n!}{a(a+1)\ldots(a+n)} \frac{S(a+n+1)}{n^a\Gamma(n+1)} - l\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{a(a+1)} + \ldots\right].$$

En tenant compte de la seconde relation et de la définition de Gauss,

$$S(a) = k\Gamma(a) - le P(a) = (k - le)P(a) + kQ(a).$$

C'est Weierstrass qui a donné (*J. de Cr.*, t. LI) la condition que nous venons d'établir, condition qui suffit avec la relation fonctionnelle à déterminer la fonction Γ. La fonction Γ se présente comme la plus simple des fonctions S.

Voir Prym (*J. de Cr.*, t. LXXII) et Bourguet (*Ann. de l'Ec. Norm.*, thèse, p. 46).

§ **12.** L'expression approchée de $\Gamma(a)$ pour des valeurs très grandes de l'argument conduit à considérer la fonction gamma comme le produit de deux fonctions dont l'une est précisément cette valeur approchée, l'autre ayant pour limite l'unité lorsque a augmente indéfiniment. L'intégrale définie par laquelle nous avons représenté $l\Gamma(a)$ conduit simplement à cette décomposition.

On a

$$(1) \qquad l\Gamma(a) = \int_0^\infty \left[(a-1)e^{-x} - \frac{e^{-x} - e^{-ax}}{1-e^{-x}}\right]\frac{dx}{x},$$

que l'on peut écrire

$$l\Gamma(a) = \int_0^\infty \left(a - 1 - \frac{1}{1-e^{-x}}\right)\frac{e^{-x}}{x}\,dx + \int_0^\infty \frac{1}{x(1-e^{-x})}e^{ax}\,dx,$$

ou bien encore, en remarquant que, si l'on développe $\frac{1}{x(1-e^{-x})}$ suivant les puissances croissantes de x, les termes qui renferment des exposants négatifs sont

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x},$$

$$(2) \qquad l\Gamma(a) = F(a) + \varpi(a),$$

où

$$(3) \qquad \begin{cases} F(a) = \displaystyle\int_0^\infty \left[\left(a - 1 - \frac{1}{1-e^{-x}}\right)e^{-x} + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right)e^{-ax}\right]\frac{dx}{x}, \\ \varpi(a) = \displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right)e^{-ax}\,\frac{dx}{x}. \end{cases}$$

On peut calculer aisément $F(a)$ sous forme finie. Nous nous appuierons sur l'évaluation des intégrales suivantes : on a

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha}.$$

On en déduit, en multipliant les deux membres par $d\alpha$ et les intégrant ensuite entre les limites α et β,

$$(4)\qquad \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\,dx = l\beta - l\alpha.$$

Si l'on multiplie de nouveau les deux membres de (4) par $d\alpha$ et que l'on intègre entre les limites α et γ, on trouve

$$(5)\qquad \begin{aligned} &\int_0^\infty \left[\frac{e^{-\alpha x} - e^{-\gamma x}}{x^2} - \frac{e^{-\beta x}(\gamma - \alpha)}{x}\right]dx \\ &\qquad = (\gamma - \alpha)l\beta - \gamma l\gamma + \alpha l\alpha + \gamma - \alpha. \end{aligned}$$

Calculons maintenant $\varpi\left(\frac{1}{2}\right)$; on a

$$\varpi\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}\frac{dx}{x}$$

ou bien, en remplaçant x par $2x$,

$$(6)\qquad \varpi\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-2x}} - \frac{1}{2x} - \frac{1}{2}\right)e^{-x}\frac{dx}{x}.$$

D'autre part, on a identiquement

$$\frac{e^{-x}}{1-e^{-2x}} = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\left(1 - \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\right) = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} - \frac{e^{-2x}}{1-e^{-2x}};$$

mais on a,

$$\varpi(1) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right)e^{-x}\frac{dx}{x},$$

et en remplaçant x par $2x$

$$\varpi(1) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-2x}} - \frac{1}{2x} - \frac{1}{2}\right)e^{-2x}\frac{dx}{x},$$

et on en conclut, en retranchant membre à membre ces deux équations,

$$(7)\qquad 0=\int_0^\infty\left(\frac{1}{1-e^{-2x}}-\frac{2-e^{-x}}{2x}-\frac{1-e^{-x}}{2}\right)e^{-x}\frac{dx}{x}.$$

En retranchant membre à membre les équations (6) et (7), on obtient donc

$$\varpi\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\int_0^\infty\left(\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x^2}-\frac{e^{-2x}}{x}\right)dx;$$

la formule (5), où l'on fait $\alpha=1$, $\beta=2$, $\gamma=2$, donne alors

$$\varpi\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{l2}{2},$$

et comme on connaît $l\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, qui est égal à $\frac{1}{2}\,l\pi$, on a donc, (2),

$$F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\,l2\pi-\frac{1}{2}.$$

$F\left(\frac{1}{2}\right)$ étant connu, les formules (4) et (5) permettent d'obtenir $F(a)$, en calculant la différence $F(a)-F\left(\frac{1}{2}\right)$; on a :

$$F(a)-F\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty\left[\left(a-\frac{1}{2}\right)e^{-x}+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)\left(e^{-ax}-e^{-\frac{1}{2}x}\right)\right]\frac{dx}{x},$$

ce que l'on peut écrire comme il suit :

$$\int_0^\infty\left(\frac{e^{-ax}-e^{-\frac{x}{2}}}{x^2}+\frac{\left(a-\frac{1}{2}\right)e^{-x}}{x}\right)dx+\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{e^{-ax}-e^{-\frac{1}{2}x}}{x}\,dx;$$

la formule (5), où l'on fait $\alpha=a$, $\beta=1$ et $\gamma=\frac{1}{2}$, fournit la valeur de la première intégrale; la formule (4), où l'on fait $\alpha=a$, $\beta=\frac{1}{2}$, donne la seconde, et il vient

$$F(a)-F\left(\frac{1}{2}\right)=-a+\frac{1}{2}+\left(a-\frac{1}{2}\right)la;$$

par conséquent

$$F(a) = \left(a - \frac{1}{2}\right) la - a + \frac{1}{2} l2\pi.$$

On a donc

$$l\Gamma(a) = \left(a - \frac{1}{2}\right) la - a + \frac{1}{2} l2\pi + \varpi(a)$$

et par suite

$$\Gamma(a) = e^{-a} a^{a-\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi}\, e^{\varpi(a)}.$$

Lorsque a est très grand, la valeur approchée connue de $\Gamma(a)$ montre que $e^{\varpi(a)}$ est voisin de l'unité, ou, si l'on veut, que $\varpi(a)$ a pour limite zéro.

Avec la notation employée dans le paragraphe précédent, on a

$$\varpi(a) = l\varphi(a-1).$$

Legendre (*Exerc.*, t. I, p. 289) avait établi, en partant de résultats dus à Euler (*Calcul diff.*, p. 465), la formule

$$\Gamma(a+1) = \left(\frac{a}{e}\right)^{a} (2\pi a)^{\frac{1}{2}} R.$$

Mais sa démonstration suppose a entier. La détermination du coefficient de R a, comme nous l'avons déjà dit, été l'objet des travaux de plusieurs géomètres :

Cauchy, *Exerc. d'A. et de Ph.*, t. II, p. 384.
Liouville, *J. de Liou.*, t. IV, p. 318.
Schaar, *Mém. Com. Ac. Belg.*, t. XXII, p. 6.
Stern, *Beiträge ...*, p. 134.
Genocchi, *Bull. Ac. Belg.*, t. XXI, p. 84.
Schlömilch, *Studien*, t. I, p. 53.
— , *Compendium*, t. II, p. 249.

La fonction $\varpi(a)$, dont le rôle est si important dans la théorie de la fonction gamma, a été introduite par Plana (*Mém. Ac. de Turin*, t. XXIV, p. 410), puis retrouvée par Binet qui la désignait

par $\mu(a)$. C'est Cauchy (*C. R.*, t. XVI, p. 422) qui s'est servi le premier du symbole ϖ adopté maintenant d'une façon générale; Catalan (*C. R.*, t. LXXXVIII) a employé pour désigner la même fonction le caractère ω.

§ **13.** La formule

$$(1) \qquad l\Gamma(a+1) = \frac{1}{2} l2\pi - a + \left(a+\frac{1}{2}\right) la + \varpi(a)$$

nous démontre que nous obtiendrons des développements de $l\Gamma(a+1)$ en développant la fonction $\varpi(a)$ donnée par l'intégrale définie

$$(2) \qquad \varpi(a) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right) e^{-ax} \frac{dx}{x}.$$

Partons de la formule

$$(3) \qquad \sin x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots;$$

en prenant la dérivée logarithmique des deux membres, on obtient

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{2x}{\pi^2-x^2} - \frac{2x}{4\pi^2-x^2} - \frac{2x}{9\pi^2-x^2} - \cdots$$

ou bien

$$(4) \quad \frac{1}{x^2}(x\cot x - 1) = -2\left(\frac{1}{\pi^2-x^2} + \frac{1}{4\pi^2-x^2} + \frac{1}{9\pi^2-x^2} + \cdots\right);$$

remplaçant la cotangente par des exponentielles, puis substituant $\frac{ix}{2}$ à x, il vient

$$(5) \qquad \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right) = 2\sum_1^\infty \frac{1}{4m^2\pi^2+x^2}.$$

On obtient ensuite, par la division,

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{4m^2\pi^2+x^2} &= \frac{1}{(2m\pi)^2} - \frac{x^2}{(2m\pi)^4} + \dots \\ &\dots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-2}}{(2m\pi)^{2n}} + \frac{(-1)^n\theta_m x^{2n}}{(2m\pi)^{2n+2}} \end{aligned}\right.$$

en posant

$$(7)\qquad \theta_m = \frac{4m^2\pi^2}{4m^2\pi^2+x^2}.$$

La valeur de θ_m est comprise entre 0 et 1.

Donnons à m les valeurs successives 1, 2,... jusqu'à l'infini et ajoutons ensuite tous les résultats obtenus, en remarquant que si l'on pose

$$\sum_1^\infty \theta_m \frac{1}{2m\pi^{2n+2}} = \theta \sum_1^\infty \frac{1}{(2m\pi)^{2n+2}},$$

θ sera nécessairement compris entre 0 et 1; on aura

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right) &= 2\sum_1^\infty \frac{1}{(2m\pi)^2} - 2x^2\sum_1^\infty \frac{1}{(2m\pi)^4} + \dots \\ &+ (-1)^{n-1}2x^{2n-2}\sum_1^\infty \frac{1}{(2m\pi)^{2n}} + (-1)^n 2\theta x^{2n}\sum_1^\infty \frac{1}{(2m\pi)^{2n+2}}; \end{aligned}\right.$$

et si l'on fait

$$(9)\qquad \frac{B^n}{2n!} = \frac{1}{2^{2n-1}\pi^{2n}}\left(1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \dots\right),$$

il viendra

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right) &= \frac{B_1}{1.2} - \frac{B_2}{4!}x^2 + \dots \\ &\dots + (-1)^{n-1}\frac{B^n}{2n!}x^{2n-2} + (-1)^n\theta\frac{Bn+1}{(2n+2)!}x^{2n}, \end{aligned}\right.$$

où $0 < \theta < 1$.

La fonction de x qui constitue le premier membre de cette formule ne devient infinie que pour des valeurs de x comprises

dans la formule $x = 2k\pi i$, k étant un nombre entier positif ou négatif, mais différent de zéro; cette fonction est donc développable en série convergente par la formule de Mac-Laurin pour toutes les valeurs réelles ou imaginaires de x de module inférieur à 2π, en sorte qu'on a dans cette hypothèse

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{x}\left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right) = \frac{B_1}{12} - \frac{B_2}{4!}x^2 + \ldots \\ &\qquad\qquad \ldots + (-1)^{n-1}\frac{B_n}{2n!}x^{2n-2} + \ldots, \end{aligned}\right.$$

la série étant prolongée indéfiniment.

Mais la formule (10) subsiste pour toutes les valeurs réelles de x et elle fait connaître l'expression du reste de la série quand on s'arrête au terme de rang n.

Les coefficients B qui se présentent ici ont reçu le nom de nombres de Bernoulli. Ils s'offrent dans ce qui précède comme quotients de deux transcendantes, mais ce sont des nombres rationnels et on peut les obtenir comme il suit.

On a identiquement

$$\frac{1}{x}\left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1 + \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} - \dfrac{e^x - e^{-x}}{x}}{x(e^x - e^{-x})},$$

en sorte que l'on peut écrire la formule (10) sous la forme

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left(1 + \frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) \\ &\quad = \frac{e^x - e^{-x}}{2x}\left[1 + \frac{B_1}{1.2}x^2 - \frac{B_2}{4!}x^4 + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{B_n}{2n!}x^{2n} + \ldots\right], \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en remplaçant les exponentielles par leurs valeurs en séries,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left(2 + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^{2n}}{2n!} + \ldots\right) \\ &= \left(1 + \frac{x^2}{3!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} + \ldots\right) \\ &\quad \left(1 + \frac{B_1}{1.2}x^2 + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{B^n}{2n!}x^{2n} + \ldots\right). \end{aligned}$$

Les deux séries du second membre sont absolument convergentes, donc si l'on effectue leur produit et qu'on l'ordonne par rapport aux puissances de x, on reproduit identiquement la série contenue dans le premier membre. En égalant les coefficients des différentes puissances de x, on a

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+B_1=0,$$
$$\frac{1}{5}-\frac{1}{2}+\frac{4}{2}B_1-B_2=0,$$

et ainsi de suite. On a en général

$$0=\frac{1}{(2n+1)!}-\frac{1}{2}\frac{1}{2n!}+\frac{1}{(2n-1)!}\frac{B_1}{1.2}-\frac{1}{(2n-3)!}\frac{B_2}{4!}+\dots$$
$$+\frac{(-1)^{p-1}}{(2n-2p+1)!}\frac{B_p}{2p!}+\dots+\frac{(-1)^{n-1}}{1}\frac{B_n}{2n!},$$

qui détermine B_n si l'on connaît $B_1, B_2, \dots, B_{n-1}$. On voit que les quantités B se déterminent successivement et de plus que tous ces nombres sont rationnels.

La formule (2) permet alors d'écrire $\varpi(a)$ sous la forme

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} \varpi(a) &= \int_0^\infty\left(\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)e^{-ax}\frac{dx}{x}\\ &= \frac{B_1}{1.2}\int_0^\infty e^{-ax}\,dx-\frac{B_2}{4!}\int_0^\infty x^2e^{-ax}\,dx+\dots\\ &\quad+(-1)^{n-1}\frac{B_n}{2n!}\int_0^\infty x^{2n-2}e^{-ax}\,dx\\ &\quad+(-1)^n\frac{B_{n+1}}{(2n+2)!}\int_0^\infty \theta x^{2n}e^{-ax}\,dx.\end{aligned}\right.$$

Toutes les intégrations sauf la dernière s'effectuent immédiatement; l'intégrale $\int_0^\infty \theta x^{2n} e^{-ax}\,dx$ est positive et inférieure à $\int_0^\infty x^{2n} e^{-ax}\,dx$, c'est-à-dire à $\frac{2n!}{a^{2n+1}}$, on peut donc la représenter par $\frac{\theta 2n!}{a^{2n+1}}$, en désignant par θ une quantité comprise entre 0 et 1.

Il vient ainsi :

$$(13)\quad \begin{cases} \varpi(a) = \dfrac{B_1}{1.2}\dfrac{1}{a} - \dfrac{B_2}{3.4}\dfrac{1}{a^3} + \ldots + (-1)^{n-1}\dfrac{B_n}{(2n-1)2n}\dfrac{1}{a^{2n-1}} \\ \qquad + (-1)^n\theta\dfrac{B^{n+1}}{(2n+1)(2n+2)}\dfrac{1}{a^{2n+1}}, \end{cases}$$

et par suite on a pour toute valeur positive de a

$$(14)\quad \begin{cases} l\Gamma(a+1) = \dfrac{1}{2}l2\pi - a + \left(a+\dfrac{1}{2}\right)la + \dfrac{B_1}{1.2}\dfrac{1}{a} - \dfrac{B_2}{3.4}\dfrac{1}{a^3} + \ldots \\ \quad + (-1)^{n-1}\dfrac{B_n}{(2n-1)2n}\dfrac{1}{a^{2n-1}} + (-1)^n\theta\dfrac{B_{n+1}}{(2n+1)(2n+2)}\dfrac{1}{a^{2n+1}}. \end{cases}$$

En prolongeant à l'infini la série du second membre, on a la formule

$$(15)\quad \begin{cases} l\Gamma(a+1) = \dfrac{1}{2}l2\pi - a + \left(a+\dfrac{1}{2}\right)la + \dfrac{B_1}{1.2}\dfrac{1}{a^3} - \dfrac{B_2}{3.4}\dfrac{1}{a} + \ldots \\ \qquad + (-1)^{n-1}\dfrac{B_n}{(2n-1)2_n}\dfrac{1}{a^{2n-1}} + \ldots. \end{cases}$$

Cette série est divergente quelque grande que soit la valeur attribuée à a; en effet, la valeur absolue du terme général $\dfrac{B_n}{(2n-1)2n}\dfrac{1}{a^{2n}}$ est égale au produit des deux quantités

$$\frac{1}{2\pi a}\cdot\frac{2}{2\pi a}\cdot\frac{3}{2\pi a}\cdots\frac{2n-2}{2\pi a} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2\pi^2 a}\left(1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\ldots\right)$$

d'après la définition des coefficients B_n (9). La seconde de ces expressions a pour limite $\dfrac{1}{2\pi^2 a}$ quand n augmente indéfiniment; la première expression, au contraire, augmente au delà de toute limite, car elle est un produit dont les facteurs inférieurs à 1 sont en nombre limité, tandis que le nombre de ceux qui sont supérieurs à 1 et même à telle quantité que l'on voudra peut devenir plus grand que tout nombre donné. Il résulte de là que les termes de la série croissent à partir d'un certain rang au delà de toute limite, et, par suite, cette série est divergente.

Malgré sa divergence, cette série donne un procédé exact et commode pour calculer $l\Gamma(a+1)$ et l'approximation que l'on peut obtenir ainsi est d'autant plus grande que a est plus considérable. En effet, les formules établies montrent que si a est supérieur à 1, les termes multipliés par les nombres B dans la formule qui nous occupe vont d'abord en décroissant, et l'on voit que l'erreur commise est toujours moindre en valeur absolue que le premier des termes négligés.

On aura donc la plus grande approximation possible en s'arrêtant au terme qui précède le terme minimum, et ce terme minimum donnera une limite supérieure de l'erreur que l'on aura commise.

Si, par exemple, on néglige complètement dans la formule les termes multipliés par les coefficients B, l'erreur commise sera positive et inférieure à $\frac{B_1}{1.2}\frac{1}{a}$ ou $\frac{1}{12}\frac{1}{a}$, car $B_1 = \frac{1}{6}$; on a donc

$$(16)\qquad \begin{cases} l\Gamma(a+1) > \frac{1}{2}l2\pi - a + \left(a+\frac{1}{2}\right)la, \\ l\Gamma(a+1) < \frac{1}{2}l2\pi - a + \left(a+\frac{1}{2}\right)la + \frac{1}{12a}, \end{cases}$$

ou bien

$$(17)\qquad \begin{cases} \Gamma(a+1) > \sqrt{2\pi}\, e^{-a}\, a^{a+\frac{1}{2}}, \\ \Gamma(a+1) < \sqrt{2\pi}\, e^{-a}\, a^{a+\frac{1}{2}}\, e^{\frac{1}{12a}}. \end{cases}$$

Ces formules permettent d'obtenir deux limites du nombre de Bernoulli B_n. On a

$$(18)\qquad B_n = \frac{2n!}{2^{2n-1}\pi^{2n}} S_{2n}, \qquad B_1 = \frac{S_2}{\pi^2},$$

en posant

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \dots.$$

On en tire

$$\frac{B_{n+1}}{B_n} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{4\pi^2}\frac{S_{2n+2}}{S_{2n}}, \qquad \frac{B_n}{B_1} = \frac{2n!}{2^{2n-1}\pi^{2n-2}}\frac{S_{2n}}{S_2},$$

et comme S_{2n} décroît quand n augmente, on a

$$(19) \qquad \frac{B_{n+1}}{B_n} < \frac{(2n+1)(2n+2)}{4\pi^2}, \qquad \frac{B_n}{B_1} < \frac{2n!}{2^{2n-1}\pi^{2n-2}},$$

ou bien

$$(20) \qquad \frac{B_{n+1}}{(2n+1)(2n+2)} < \frac{B_n}{4\pi^2}, \qquad B_n < \frac{1}{12}\frac{\Gamma(2n+1)}{(2\pi)^{2n-2}}.$$

La dernière formule donne une limite supérieure de B_n, on aura une limite inférieure en remplaçant, dans l'expression primitive de B_n, S_{2n} par l'unité, on aura ainsi :

$$(21) \qquad B_n > \frac{\Gamma(2n+1)}{2^{2n-1}\pi^{2n}}.$$

Remplaçons maintenant $\Gamma(2n+1)$ par les limites supérieure et inférieure trouvées précédemment et il viendra

$$(22) \qquad \left\{ \begin{aligned} B_n &< \frac{1}{12}\frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{2n-\frac{5}{2}}} e^{-2n} e^{\frac{1}{24n}}, \\ B_n &> 2\frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{2n+\frac{1}{2}}} e^{-2n}. \end{aligned} \right.$$

Ces formules conduisent à une détermination facile de l'approximation avec laquelle on peut calculer $l\Gamma(a+1)$ par le développement trouvé précédemment.

Soit u_n le terme qui dépend des coefficients B_n, on aura, si l'on ne considère que les valeurs absolues des termes

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{B_{n+1}}{B_n}\frac{(2n-1)2n}{(2n+1)(2n+2)}\frac{1}{a^2},$$

et, à cause de la première des formules (19),

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{(2n-1)2n}{4\pi^2 a^2},$$

ou encore, *a fortiori*,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{n^2}{\pi^2 a^2} < \left(\frac{n}{3a}\right)^2.$$

Donc, u_{n+1} sera inférieur à u_n tant qu'on aura $n < 3a$ ou $n = 3a$. Nous voyons donc que si a est plus grand que 1, la série trouvée pour $\varpi(a)$ est décroissante dans ses derniers termes; si a est un nombre entier, les termes successifs sont de plus en plus petits certainement jusqu'au terme de rang $3a$ et même de rang $3a+1$.

Désignons par ε_n la valeur absolue de l'erreur commise en s'arrêtant dans le développement au terme multiplié par B_n, on sait que l'on a

$$\varepsilon_n < \frac{B_{n+1}}{(2n+1)(2n+2)} \frac{1}{a^{2n+1}};$$

ou encore, à cause de la formule (19)

$$\varepsilon_n < \frac{B_n}{4\pi^2 a^{2n+1}},$$

et en remplaçant B_n par sa valeur approchée,

$$\varepsilon_n < \frac{1}{6} \frac{(n\pi)^{\frac{1}{2}}}{a} \left(\frac{n}{e\pi a}\right)^{2n} e^{\frac{1}{24n}}.$$

Nous avons vu qu'il convenait d'aller dans le développement au moins jusqu'au terme $3a$. En faisant $n = 3a$ dans la formule précédente, il vient

$$\varepsilon_{3a} < \frac{1}{2} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{6a-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{72a}} a^{-\frac{1}{2}} e^{-6a},$$

et comme a est égal à 1, on a à plus forte raison

$$\varepsilon_{3a} < \frac{1}{2} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{11}{2}} e^{\frac{1}{72}} a^{-\frac{1}{2}} e^{-6a}$$

$$< 0,393409 \ldots \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{e}\right)^{6a},$$

et l'on voit que l'approximation est d'autant plus grande que a

est plus considérable. L'erreur commise est en tout cas du signe du premier terme négligé.

La série que nous avons obtenue pour $l\Gamma(a+1)$ a reçu le nom de formule de Stirling.

Dans sa *Methodus Differentialis sive Tractatus de summatione serierum*..., Stirling avait résolu une quantité de problèmes importants de la théorie des séries et plusieurs questions concernant en particulier les expressions de fonctions de très grands nombres qui se présentent si fréquemment dans la théorie des probabilités. C'est parmi ces formules que se trouve celle qui a spécialement attiré l'attention des géomètres et que l'on a désigné sous le nom de formule de Stirling.

Cette formule n'est qu'un cas particulier d'une formule trouvée par Mac-Laurin et que l'on attribue généralement à Euler. La formule générale et le cas particulier qui nous occupe sont des séries divergentes. Leur emploi devrait donc être rejeté. D'autre part, la série de Stirling est d'une utilité telle qu'on peut la considérer comme indispensable; on se voyait donc forcé de la conserver malgré sa divergence. Il était cependant impossible de faire pour cette série une exemption aussi extraordinaire et aussi peu légitime. C'est pourtant ce qu'ont fait Legendre (*Exercices*, t. I, p. 294) et Gauss lui-même (*Werke*, t. III, p. 152).

Binet (*J. Ec. Pol.*, cahier XXVIII, 3e p.) a essayé de remédier à cet inconvénient en substituant à la formule de Stirling d'autres développements toujours convergents; mais la série de Stirling peut être conservée à la condition de la rendre finie, c'est-à-dire de s'arrêter à un terme déterminé en donnant l'expression du reste. C'est ce qu'a fait Cauchy dans son Mémoire sur la théorie des intégrales définies singulières (*Exerc.*, t. II, p. 395). Plus tard, Schaar (*Mém. Cour. Ac. Belg.*) donna une nouvelle expression du reste. Cette question importante donna naissance à de nombreux et remarquables travaux.

Cauchy, *C. R.*, t. XXXIX, p. 133.

Raabe, *J. de Cr.*, t. XXV, p. 147; t. XXVIII, p. 10.

Limbourg, *Théorie de la fonction gamma*. Gand, 1859.
Liouville, *J. de Liou.*, t. XVII, p. 448.
Malmsten, *J. de Cr.*, t. XXXV, p. 55.
Genocchi, *Bull. Ac. Belg.*, t. XXI, p. 64.
Bauer, *J. de Cr.*, t. LVII, p. 256.
Genocchi, *Annali di Sc. M. e f.*, III, p. 406, V, p. 91 et 102.
Bonnet, *C. R.*, t. L, p. 863.
Gilbert, *Mém. Ac. Belg.*, t. XLI.
Hermite, *Atti di Torino*, t. XIV, p. 95.
Bourguet, *Ann. Ec. Nor.*; thèse, p. 56.

La détermination du terme où il faut s'arrêter dans la série de Stirling n'a été faite au moyen de l'expression du reste que nous avons donnée que d'une façon imparfaite, quoique suffisante dans les applications. Les différentes expressions du reste par des intégrales définies obtenues dans les Mémoires que nous venons de citer conduisent à des résultats plus précis.

Schaar s'occupa de cette question (*Mém. Cour. Ac. Belg.*, t. XXII, p. 7 et 12). Limbourg (*Théorie de la fonction gamma*) a fait voir que les termes vont en diminuant jusqu'au rang dont l'indice est compris entre $\pi a + \frac{3}{4} - \frac{1}{7\pi a}$ et $\pi a + \frac{3}{4}$ en désignant par a la valeur de l'argument. Genocchi (*Il Cimento*, t. VI, p. 606) a énoncé une limite moins précise. Bourguet (*Ann. Ec. Nor.*; thèse, p. 27) a trouvé pour valeur de l'indice $\pi a + \frac{3}{4} - \frac{3}{32\pi a}$ en négligeant les termes de degré supérieur par rapport à $\frac{1}{\pi a}$.

En ce qui concerne les nombres de Bernoulli, remarquons que Adams (*J. de Cr.*, t. LXXXV, p. 265) a donné les valeurs des 62 premiers nombres.

Une bibliographie très complète de la théorie de ces nombres a été donnée par Ely (*Am. J. of Math.*, t. V, 1882, p. 228-235).

§ **14.** La formule de Stirling donne en la différentiant une ou plusieurs fois des formules qui peuvent être utiles, bien qu'elles soient divergentes.

Remarquons, en effet, que dans la formule (12) du paragraphe précédent, la quantité Θ est indépendante de a. On aura donc, en différentiant μ fois,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} (-1)^{\mu}\frac{d^{\mu}\varpi(a)}{da^{\mu}} &= \frac{B_1}{1.2}\int_0^{\infty} e^{-ax}x^{\mu}\,dx - \ldots \\ &+ (-1)^{n-1}\frac{B_n}{2n!}\int_0^{\infty} e^{-ax}x^{\mu+2n-2}\,dx \\ &+ (-1)^{n}\frac{B_{n+1}}{(2n+2)!}\int_0^{\infty}\Theta e^{-ax}x^{\mu+2n}\,dx, \end{aligned}\right.$$

c'est-à-dire, en raisonnant comme nous l'avons fait précédemment,

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} (-1)^{\mu}\frac{d^{\mu}\varpi(a)}{da^{\mu}} &= B_1\frac{\mu!}{2!}\frac{1}{a^{\mu+1}} - B_2\frac{(\mu+2)!}{4!}\frac{1}{a^{\mu+3}} + \ldots \\ &+ (-1)^{n-1}B_n\frac{(\mu+2n-2)!}{2n!}\frac{1}{a^{\mu+2n-1}} \\ &+ (-1)^{n}\theta B_{n+1}\frac{(\mu+2n)!}{(2n+2)!}\frac{1}{a^{\mu+2n+1}}, \end{aligned}\right.$$

θ étant une nouvelle quantité positive comprise entre 0 et 1.

Quand a est suffisamment grand, les termes du second membre vont d'abord en décroissant, et l'erreur commise quand on s'arrête à un terme quelconque est moindre que le terme suivant et de même signe que ce terme.

La formule

$$(3)\qquad l\Gamma(a+1) = \frac{1}{2}\,l2\pi - a + \left(a+\frac{1}{2}\right)la + \varpi(a)$$

donne

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dl\Gamma(a+1)}{da} &= la + \frac{1}{2a} + \frac{d\varpi(a)}{da}, \\ (-1)^{\mu}\frac{d^{\mu}l\Gamma(a+1)}{da^{\mu}} &= \frac{(\mu-2)!}{a^{\mu-1}} - \frac{(\mu-1)!}{2a^{\mu}} + (-1)^{\mu}\frac{d^{\mu}\varpi(a)}{da^{\mu}}. \end{aligned}\right.$$

On obtient donc par substitution

$$(5)\quad \begin{cases} (-1)^{\mu}\dfrac{d^{\mu}l\Gamma(a+1)}{da^{\mu}} = \dfrac{(\mu-2)!}{a^{\mu-1}} - \dfrac{(\mu-1)!}{2a^{\mu}} + B_1\dfrac{\mu!}{2!}\dfrac{1}{a^{\mu+1}} - \dots \\ \qquad + (-1)^{n-1}B_n\dfrac{(\mu+2n-2)}{2n!}\dfrac{1}{a^{\mu+2n-1}} \\ \qquad + (-1)^{n}\theta B_{n+1}\dfrac{(\mu+2n)!}{(2n+2)!}\dfrac{1}{a^{\mu+2n+1}}. \end{cases}$$

Ces résultats permettent de calculer la constante d'Euler avec telle approximation qu'on le voudra.

En supposant a entier, on a, d'après la formule (16) du § 8,

$$(6)\qquad \gamma = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{a} - \frac{dl\Gamma(a+1)}{da};$$

mais les formules précédentes nous donnent le développement de $\dfrac{dl\Gamma(a+1)}{da}$ et il vient, en substituant,

$$(7)\quad \begin{cases} \gamma = \left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dots + \dfrac{1}{a}\right) - la - \dfrac{1}{2a} \\ \qquad + \dfrac{B_1}{2a^2} - \dfrac{B_2}{4a^4} + \dots + (-1)^{n-1}\dfrac{B_n}{2na^{2n}} + \dots, \end{cases}$$

la série qui se trouve dans le second membre étant divergente, mais telle que, si l'on s'arrête au terme qui dépend de B_n, l'erreur commise est moindre, en valeur absolue, que $\dfrac{B_{n+1}}{(2n+2)\,a^{2n+2}}$. On pourra donc, en prenant a suffisamment grand, obtenir γ avec l'approximation que l'on veut.

Comme nous l'avons déjà dit à l'occasion du calcul de la constante d'Euler, la formule (7), qui est alors la plus pratique malgré sa divergence, a été donnée par ce géomètre en 1769 (*N. Comm.*, t. XIV, p. 153) [V. § 7].

§ **15.** L'expression de $\varpi(a)$ sous forme d'intégrale définie conduit à d'autres développements en séries.

On a

$$(1)\qquad \varpi(a) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right) e^{-ax} \frac{dx}{x},$$

ou bien, à cause de l'identité

$$\frac{1}{x}\left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{e^x(x-2)+2+x}{x^2(1-e^x)},$$

$$\varpi(a) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^x(x-2)+(2+x)}{x^2(1-e^x)}\,e^{ax}\,dx.$$

En développant en série l'exponentielle qui apparaît au numérateur, il vient

$$(2)\quad \varpi(a) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{e^x-1}\left[\frac{x}{3!} + \frac{2x^2}{4!} + \dots \frac{nx^n}{(n+2)!} + \dots\right] dx.$$

Considérons dès lors l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{x^n e^{-ax}}{e^x-1}\,dx;$$

elle peut s'écrire, en multipliant et divisant par e^{-x},

$$\int_0^\infty x^n \frac{e^{-(a+1)x}}{1-e^{-x}}\,dx,$$

ou bien, en effectuant la division,

$$\int_0^\infty x^n \left[e^{-(a+1)x} + e^{-(a+2)x} + \dots\right] dx.$$

Or, on a en général

$$\int_0^\infty x^n e^{-\alpha x}\,dx = \frac{\Gamma(n+1)}{\alpha^{n+1}},$$

en sorte que l'on a

$$\int_0^\infty \frac{x^n e^{-ax}}{e^x-1}\,dx = n!\left[\frac{1}{(a+1)^{n+1}} + \frac{1}{(a+2)^{n+1}} + \dots\right] = n!\sum_1^\infty \frac{1}{(a+p)^n}.$$

En substituant dans (2), il vient

$$
(3)\quad \left\{
\begin{aligned}
\varpi(a) = \frac{1}{2}\Bigg[& \frac{1}{2.3}\sum_1^r \frac{1}{(a+p)^2} + \frac{2}{3.4}\sum_1^r \frac{1}{(a+p)^3} + \dots \\
& \dots + \frac{n}{(n+1)(n+2)}\sum_1^r \frac{1}{(a+p)^{n+1}} + \dots \Bigg].
\end{aligned}
\right.
$$

L'expression connue de $l\Gamma(a+1)$ donne alors

$$
(4)\quad \left\{
\begin{aligned}
l\Gamma(a+1) = {} & \frac{1}{2}l2\pi - a + \frac{1}{2}\left\{
\begin{aligned}
& \frac{1}{2.3}\left[\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(a+2)^2} + \dots\right] \\
& + \frac{2}{3.4}\left[\frac{1}{(a+1)^3} + \frac{1}{(a+2)^3} + \dots\right] \\
& + \frac{3}{4.5}\left[\frac{1}{(a+1)^4} + \frac{1}{(a+2)^4} \dots + \right] \\
& + \dots
\end{aligned}
\right. \\
& + \left(a+\frac{1}{2}\right) l a
\end{aligned}
\right.
$$

$\varpi(a)$ et par suite cette dernière série sont convergentes pour toutes les valeurs de a telles que le module de chacun des termes $(a+1)$, $(a+2)$, $(a+3)$..., soit plus grand que 1, mais elle se prête difficilement au calcul numérique.

La série (4) a été donnée par Binet (*J. Ec. Pol.*, cah. XXVII, p. 226). La démonstration que nous en avons donnée est de Bourguet (*Ann. Ec. Norm.*; thèse, p. 15).

Binet (*C. R.*, t. IX, p. 158) a aussi donné la formule

$$
2\varpi(a) = \frac{1}{2.3}\sum \frac{1}{a^2} - \frac{2}{3.4}\sum \frac{1}{a^3} + \dots,
$$

qui a été attribuée à tort à Féaux, à différentes reprises.

Revenons encore à la formule

$$
(5)\qquad \varpi(a) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right) e^{-ax}\frac{dx}{x}:
$$

il vient, en posant $1 - e^{-x} = t$,

$$
(6)\qquad \varpi(a) = -\int_0^1 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2} + \frac{1}{l(1-t)}\right)\frac{(1-t)^{a-1}}{l(1-t)}\,dt,
$$

et occupons-nous du coefficient de $(1-t)^{a-1}$ sous le signe $\int$.

Il est facile de vérifier que l'on a identiquement :

$$\int^{r} \left(\frac{1}{2} - v\right) [1 - (1 - t)^{r}]\, dv$$
$$= \frac{1}{2} r (1 - r) - \left(\frac{1}{2} - r\right) \frac{(1 - t)^{r}}{l(1 - t)} - \frac{(1 - t)^{r}}{[l(1 - t)]^{2}},$$

ou bien, en prenant l'intégrale entre les limites 0 et 1,

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{2} - v\right) [1 - (1 - t)^{r}]\, dv = \left[1 - \frac{1}{2} t + \frac{t}{l(1 - t)}\right] \frac{1}{l(1 - t)}.$$

Le coefficient considéré s'exprime donc sous forme d'intégrale définie et on a

$$\left[\frac{1}{t} - \frac{1}{2} + \frac{1}{l(1 - t)}\right] \frac{1}{l(1 - t)} = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - v\right) \frac{1 - (1 - t)^{r}}{t}\, dv.$$

Puisque v est positif et que t est compris entre 0 et 1, on peut développer $(1 - t)^{r}$ par la formule du binôme; séparant alors les différents termes dans le second nombre, on a

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} &\left[\frac{1}{t} - \frac{1}{2} + \frac{1}{l(1 - t)}\right] \frac{1}{l(1 - t)} \\ &= \frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{1.2} t + \ldots + \frac{a_m}{m!} t^{m-1} + \ldots, \end{aligned} \right.$$

où les coefficients a ont les valeurs suivantes :

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} a_1 &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - v\right) v\, dv = -\frac{1}{12}, \\ a_2 &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - v\right) v (1 - v)\, dv = 0, \\ a_3 &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - v\right) v (1 - v)(2 - v)\, dv = \frac{1}{120}, \\ a_4 &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - v\right) v (1 - v)(2 - v)(3 - v)\, dv = \frac{1}{30}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_m &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - v\right) v (1 - v)(2 - v) \ldots (m - 1 - v)\, dv. \end{aligned} \right.$$

En substituant dans la formule (6), on a

$$(9)\quad \begin{cases} -\varpi(a) = \dfrac{a_1}{1}\displaystyle\int_0^1 (1-t)^{a-1}dt + \dfrac{a_2}{1.2}\int_0^1 (1-t)^{a-1}t\,dt + \ldots \\ \qquad \ldots + \dfrac{a_m}{m!}\displaystyle\int_0^1 (1-t)^{a-1}t^{m-1}dt + \ldots. \end{cases}$$

Or, l'intégration par parties donne

$$\int_0^1 (1-t)^{a-1}t^{m-1}dt = \frac{m-1}{a+m-1}\int_0^1 (1-t)^{a-1}t^{m-2}dt;$$

et comme on a directement

$$\int_0^1 (1-t)^{a-1}dt = \frac{1}{a},$$

il vient

$$\int_0^1 (1-t)^{a-1}t^{m-1}dt = \frac{(m-1)!}{a(a+1)\ldots(a+m-1)},$$

et par suite

$$(10)\quad \begin{cases} -\varpi(a) = \dfrac{1}{1}\dfrac{a_1}{a} + \dfrac{1}{2}\dfrac{a_2}{a(a+1)} + \ldots \\ \qquad \ldots + \dfrac{1}{m}\dfrac{a_m}{a(a+1)\ldots(a+m-1)} + \ldots. \end{cases}$$

On a donc

$$(11)\quad l\Gamma(a+1) = \frac{1}{2}l2\pi - a + \left(a+\frac{1}{2}\right)la - \sum_1^{\infty}\frac{1}{m}\frac{a_m}{a(a+1)\ldots(a+m-1)},$$

série convergente pour toute valeur de a et particulièrement lorsque a est assez grand.

La formule (11) est encore donnée par Binet dans son Mémoire sur les intégrales Eulériennes (*J. Ec. Pol.*, cah. XXVII, p. 339). La démonstration que nous avons donnée est de Schlömilch (*Compendium*, t. II, p. 260).

Binet a aussi donné un autre développement à peu près de même forme que le précédent (p. 231) :

$$2\varpi(a) = \frac{b_0}{a+1} + \frac{1}{2}\frac{b_1}{(a+1)(a+2)} + \frac{1}{3}\frac{b_2}{(a+1)(a+2)(a+3)} + \dots,$$

où les coefficients ont, d'après M. Bourguet qui a tiré ce développement de la formule (3), les valeurs suivantes (*Ann. de l'Ec. Norm.*; thèse, p. 59) :

$$b_0 = \frac{1}{6},\quad b_1 = \frac{1}{3},\quad b_2 = \frac{59}{60},\quad b_3 = \frac{58}{15},\quad b_4 = \frac{533}{28},$$
$$b_5 = \frac{1577}{14},\quad b_6 = \frac{280361}{360},\quad b_7 = \frac{277244}{45},\quad b_8 = \frac{36889359}{660},$$
$$b_9 = \frac{71769745}{132},\quad b_{10} = \frac{21632296401}{364}.$$

Binet s'était occupé de la démonstration de la convergence de ces séries. Celte question et celle de la détermination du reste quand on s'arrête à un certain terme, ont été reprises par Genocchi (*Bull. Ac. Belg.*, t. XXI, p. 84; t. XXXVI, p. 550; *Annales Tortolini*, t. II, p. 380), par de Tilly (*Bull. Ac. Belg.*, t. XXXV, p. 30) et par Gilbert (*Mém. Ac. Belg.*, t. XLI, p. 14-22). Il nous aurait fallu presque doubler l'étendue de cette monographie pour exposer les différents résultats auxquels on est parvenu à ce sujet.

§ **16.** La formule

$$(1)\qquad l\Gamma(a) = a\,l n - \left[l a + l\left(1+\frac{a}{1}\right)\right] + \dots + l\left(1+\frac{a}{n}\right)$$

donne, en prenant la dérivée des deux membres,

$$(2)\qquad \frac{d\,l\Gamma(a)}{da} = \psi(a) = l n - \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} - \dots - \frac{1}{a+n}.$$

A ce point de vue on peut remarquer que $l\Gamma(a)$ et $\psi(a)$ se présentent comme différences de deux quantités infiniment grandes.

Il n'en sera plus de même de la dérivée seconde $\frac{d^2 l\Gamma(a)}{da^2}$ que nous désignons par $\chi(a)$. On a en effet

$$(3)\qquad \frac{d^2 l\Gamma(a)}{da^2} = \chi(a) = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(2+n)^2} + \ldots,$$

la série étant prolongée indéfiniment. Cette série est convergente pour toutes les valeurs réelles ou imaginaires de a. Elle définit une fonction, pour tous les points du plan, qui ne présente de pôles qu'aux points $0, -1, -2, \ldots -n, \ldots$

Aux propriétés fondamentales de la fonction Γ correspondent pour χ les propriétés suivantes :

$$(4)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\chi(a+1) - \chi(a) = -\frac{1}{a^2}, \\ &\chi(a) + \chi(1-a) = \left(\frac{\pi}{\sin a\pi}\right)^2, \\ &\chi(a) + \chi\left(a+\frac{1}{n}\right) + \ldots + \chi\left(a+\frac{n-1}{n}\right) = n^2\chi(na). \end{aligned} \right.$$

Nous les déduisons par différentiation, mais elles peuvent être démontrées directement en partant de la série (3) qui définit $\chi(a)$.

La formule (3) a été donnée par Gauss (*Werke*, t. III, p. 154). Genocchi (*Bull. Ac. Belg.*, t. XXXVI, p. 557) a remarqué que cette expression de $\frac{d^2 l\Gamma(a)}{da^2}$ était une conséquence immédiate des résultats auxquels Euler était arrivé en traitant des fonctions *inexplicables* (*Calc. Diff.*, t. II, p. 615).

C'est à l'aide de cette formule que Legendre a démontré la relation de Gauss (*Exerc.*, t. II, p. 17). Il avait déjà rencontré (*Exerc.*, t. I, p. 261) dans la théorie des intégrales Eulériennes des séries plus générales que celle qui figure dans le second membre de l'équation (3). L'importance de cette même formule a été reconnue depuis longtemps.

Serret, *Calc. D. et I.*, t. II, p. 209.

Schlömilch, *Studien*, t. I, p. 44.

Meyer, *Vorlesungen*..., p. 154.

M. Hermite (*Cours rédigé par Andoyer*, p. 94...) a montré que l'on pouvait prendre cette formule comme base de la théorie des fonctions gamma.

On peut démontrer, en partant de l'expression de $\chi(a)$ en série, que la fonction $\frac{1}{\Gamma(a)}$ est holomorphe dans tout le plan.

Multiplions les deux membres de l'équation

$$(5) \qquad \chi(a) = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+1)^2} + \dots + \frac{1}{(a+n)^2} + \dots$$

par da, et intégrons entre les limites 1 et a, on aura

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \psi(a) = -c + \left(1 - \frac{1}{a}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{a+1}\right) + \dots \\ \dots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{a+n}\right) + \dots, \end{aligned} \right.$$

série convergente puisque le terme général est

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{a+n} = \frac{a-n}{(n+1)(a+n)}.$$

La constante c se détermine en faisant $a = 1$, et on aura

$$-c = \psi(1) = -\gamma,$$

γ étant la constante d'Euler.

Changeons a en $a+1$, multiplions de nouveau par da et intégrons entre les limites 0 et a, on a

$$(7) \quad l\frac{1}{\Gamma(a+1)} = \gamma a + [l(1+a) - a] + \dots + \left[l\left(1 + \frac{a}{n}\right) - \frac{a}{n}\right] + \dots,$$

et il est inutile d'ajouter une constante, comme on le vérifie en faisant $a = 0$.

En développant dans le terme général le logarithme, on voit immédiatement que cette série est convergente pour toute valeur de a.

Repassant des logarithmes aux nombres, il vient

$$(8) \qquad \frac{1}{\Gamma(a+1)} = e^{\gamma a} \prod_1^{\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right) e^{-\frac{a}{n}};$$

$\dfrac{1}{\Gamma(a+1)}$ est donc une fonction holomorphe dans tout le plan, et on a son expression sous forme de facteurs primaires.

Les recherches de Vandermonde, Kramp, Bessel, Crelle, Eytelwein, Oettinger, Ohm, Raabe et Hoppe sur les factorielles ou facultés analytiques, avaient conduit à des résultats intéressants, mais aussi à des contradictions que l'on ne pouvait lever. Weierstrass (*J. de Cr.*, LI, p. 1 — 60) reprit la question de la détermination des conditions nécessaires et suffisantes pour définir les facultés analytiques.

C'est dans ce mémoire fondamental que Weierstrass établit l'holomorphisme de la fonction $\dfrac{1}{\Gamma(a)}$ et la décomposa en facteurs primaires.

Au dernier point de vue, il est à remarquer que Newman (*Camb. and Dub. J.*, t. III, p. 59) avait déjà mis $\Gamma(a)$ sous la forme

$$\Gamma(a) = \frac{e^{-\gamma a}}{a}\,\frac{e^{a}}{1+a}\,\frac{e^{\frac{a}{2}}}{\left(1+\frac{a}{2}\right)}\cdots$$

Schlömilch (*Anal. Stud.*, t. I, p. 45) a retrouvé cette dernière formule en la tirant de la définition de Gauss.

M. Bourguet a montré très simplement l'holomorphisme de $\dfrac{1}{\Gamma(a)}$ en remarquant que $\sin a\pi\Gamma(a) = \sin a\pi[P(a)+Q(a)]$; $\sin a\pi Q(a)$ est holomorphe, dans le produit $\sin a\pi P(a)$ les pôles disparaissent. On en conclut que $\dfrac{1}{\Gamma(1-a)}$ et par suite $\dfrac{1}{\Gamma(a)}$ est holomorphe (*Ann. Ec. Norm.*, thèse, p. 29).

La formule

$$\frac{1}{\Gamma(a+1)} = e^{\gamma a}\prod_{1}^{\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)e^{-\frac{a}{n}}$$

donne

$$\Gamma(a) = \frac{e^{-\gamma a}}{a\Pi\left(1+\frac{a}{n}\right)e^{-\frac{a}{n}}},$$

et on peut employer cette forme donnée à la fonction gamma pour en démontrer simplement les propriétés fondamentales. Nous nous en servirons pour établir une formule qui comprend comme cas particulier la relation des compléments.

Cette relation peut être mise sous la forme

$$\Gamma(1+a)\Gamma(1-a) = \frac{a\pi}{\sin a\pi},$$

ou bien encore, en employant l'expression de $\sin a\pi$ sous forme de produit infini :

$$\frac{1}{\Gamma(1-\rho_1 a)\Gamma(1-\rho_2 a)} = \prod_1^{\infty}\left(1-\frac{a^2}{n^2}\right),$$

en désignant par ρ_1 et ρ_2 les racines de l'équation

$$\rho^2 = 1.$$

D'une façon plus générale, en désignant par $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\nu$ les racines de l'équation

$$\rho^\nu = 1,$$

on aura

$$\frac{1}{\Gamma(1-\rho_1 a)\Gamma(1-\rho_2 a)\ldots\Gamma(1-\rho_\nu a)} = \prod_1^{\infty}\left(1-\frac{a^\nu}{n^\nu}\right),$$

ou encore

$$\frac{\Gamma^\nu(z)}{\Gamma(z-\rho_1 a)\Gamma(z-\rho_2 a)\ldots\Gamma(z-\rho_\nu a)} = \prod_0^{\infty}\left(1-\frac{a^\nu}{(z+n)^\nu}\right).$$

En effet, en désignant par ω le premier membre de la dernière formule, et remplaçant Γ par son expression (2), il vient

$$\omega = \frac{(z-\rho_1 a)\ldots(z-\rho_\nu a)\prod_1^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}-\rho_1\frac{a}{n}\right)\ldots\left(1+\frac{z}{n}-\rho_\nu\frac{a}{n}\right)e^{-\frac{\nu z}{n}}}{z^\nu\prod_1^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^\nu e^{-\frac{\nu z}{n}}};$$

mais on a

$$\left(1+\frac{z}{n}-\rho_1\frac{a}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{z}{n}-\rho_\nu\frac{a}{n}\right)=\left(1+\frac{z}{n}\right)^\nu-\left(\frac{a}{n}\right)^\nu$$
$$=\left(1+\frac{z}{n}\right)^\nu\left(1-\frac{a^\nu}{(z+n)^\nu}\right)$$

et par suite

$$\omega=\frac{(z^\nu-a^\nu)\prod_1^\infty\left(1+\frac{z}{n}\right)^\nu\left(1-\frac{a^\nu}{(z+n)^\nu}\right)e^{-\frac{\nu z}{n}}}{z^\nu\prod_1^\infty\left(1+\frac{z}{n}\right)^\nu e^{-\frac{\nu z}{n}}},$$

ou bien, en supprimant les facteurs communs,

$$\omega=\prod_0^\infty\left(1-\frac{a^\nu}{(z+n)^\nu}\right),$$

et la formule est démontrée. En faisant $z=1$, $\nu=2$, on a la relation des compléments.

Lorsque l'on fait $z=1$, ν étant supérieur à 2, la fonction qui apparaît dans le second membre n'est jamais périodique, et il en est de même de la fonction

$$a^\mu\prod_1^\infty\left(1-\frac{a^\nu}{n^\nu}\right).$$

En effet, les zéros de cette fonction sont à l'intersection des cercles de rayon 0, 1, 2,... avec les segments partant de l'origine et faisant avec Ox des angles respectivement égaux à 0, $\frac{2\pi}{\nu}$, $\frac{4\pi}{\nu}$,... $\frac{2(\nu-1)\pi}{\nu}$. Leur distribution dans le plan est donc bien différente de celle qui s'offre dans le cas des fonctions périodiques.

Cauchy s'était occupé des relations qui existent entre les fonctions Γ (*Exerc.*, t. II, p. 398...); Liouville signala certaines particularités du quotient $\frac{\Pi\Gamma(ap+b)}{\Pi\Gamma(a'p+b')}$ où $\Sigma a=\Sigma a'$. La propriété démontrée précédemment est due à Mellin (*Acta Math.*, t. III, p. 102). Voir aussi Hermite (*Cours rédigé par Andoyer*, p. 105).

CALCUL DE LA FONCTION GAMMA

Développements en séries.

§ **17.** On a, d'après ce qui a été dit jusqu'ici, différentes formules générales pour calculer par approximation les fonctions gamma.

On a d'une part

$$l\Gamma(1+a) = -\gamma a + \frac{1}{2} S_2 a^2 - \frac{1}{3} S_3 a^3 + \frac{1}{4} S_4 a^4 - \ldots,$$

$$l\Gamma(1+a) = \frac{1}{2} l \frac{\pi a}{\sin \pi a} - \gamma a - \frac{1}{3} S_3 a^4 - \frac{1}{5} S_5 a^5 - \ldots,$$

$$l\Gamma(1+a) = \frac{1}{2} l \frac{\pi a}{\sin \pi a} - \frac{1}{2} l \frac{1+a}{1-a} + (1-\gamma) a - (S_3 - 1) \frac{a^3}{3} - \ldots.$$

Lorsqu'il s'agit de calculer $l\Gamma(b)$ pour une valeur donnée de b, on peut toujours réduire la question au cas où $b = 1 + a$, a étant $< \frac{1}{2}$ ou même $< \frac{1}{4}$. Les suites précédentes sont alors convergentes, en sorte que le degré d'approximation auquel on peut parvenir avec elles n'est limité que par l'approximation même avec laquelle on connaît S_2, S_3, S_4, ...

Si l'on veut avoir les logarithmes ordinaires de la fonction Γ, il faut multiplier par le module $m = 0,43429$ ... tous les termes algébriques du développement employé.

En posant, par exemple,

$$m(1-\gamma)=B, \quad \frac{m}{3}(S_3-1)=B_3, \quad \frac{m}{5}(S_5-1)=B_5, \ldots,$$

on a

$$\log\Gamma(1+a)=\frac{1}{2}\log\frac{\pi a}{\sin\pi a}-\frac{1}{2}\,l\,\frac{1+a}{1-a}$$
$$+\,Ba-B_3a^3-B_5a^5-\ldots.$$

Il est cependant préférable d'employer la formule de Stirling:

$$l\Gamma(a)=\frac{1}{2}l2\pi-a+\left(a-\frac{1}{2}\right)la+\frac{B_1}{1.2}\frac{1}{a}-\frac{B_2}{3.4}\frac{1}{a^3}+\frac{B_3}{5.6}\frac{1}{a^5}-\ldots.$$

Ce développement donne $l\Gamma(a)$ avec une approximation d'autant plus considérable que a est plus grand; il est facile de voir, par exemple (§ 13), que pour avoir $l\Gamma(a)$ avec douze décimales exactes, il faut que l'on ait $a>5$ et il suffira alors de calculer les sept ou huit premiers termes de la suite qui apparaît dans le second membre.

Si l'on veut connaître la fonction gamma quand l'argument varie de 1 à 2, on se servira de la formule

$$l\Gamma(a)=l\Gamma(4+a)-l[a(1+a)(2+a)(3+a)],$$

où le second membre est maintenant facile à calculer.

Legendre a donné des tables de $\log\Gamma(a)$ de millième en millième, d'abord avec sept décimales (*Exerc.*, t. I, p. 302), puis avec douze décimales (t. II, p. 86).

Bessel (*Werke*, t. II, p. 350) donne des tables de la fonction $\log\frac{\Gamma(a)}{\sqrt{2\pi}}$.

Gauss a fait calculer par Nicolaï les tables suivantes de $\log\Gamma(a)$ à vingt décimales et de $\psi(a)$ à dix-huit décimales de centième en centième.

Bellavitis (*Mem. del Ist. Veneto*, 1874) a donné entre autres tables celle de $l\Gamma(a)$ de dixième en dixième, depuis 10 jusqu'à 12 et à 8 décimales.

z	$\log \Gamma(z)$		$\psi(z)$	
1,00	0,000 000 0000	000 000 0000	−0,577 215 6649	0153 2861
1,01	9,997 528 7306	586 917 2624	0,560 885 4578	6867 4498
1,02	9,995 127 8719	887 903 4144	0,544 789 3104	5617 9789
1,03	9,992 796 4208	888 358 9748	0,528 921 0872	8543 0502
1,04	9,990 533 4004	084 290 0595	0,513 274 8789	1683 0312
1,05	9,988 337 8587	901 204 6216	0,497 844 9912	9987 0371
1,06	9,986 208 8685	558 194 5437	0,482 625 9358	1482 5705
1,07	9,984 145 5256	352 356 7773	0,467 612 4198	6755 3632
1,08	9,982 146 9485	340 317 2902	0,452 799 3380	0171 2885
1,09	9,980 212 2775	395 113 6603	0,438 181 7634	9533 4764
1,10	9,978 340 6739	618 075 4713	0,423 754 9404	1107 6796
1,11	9,976 531 3194	086 625 0820	0,409 514 2760	7169 4248
1,12	9,974 783 4150	920 112 8963	0,395 455 3339	3429 2807
1,13	9,973 096 1811	646 908 3029	0,381 573 8268	3879 2064
1,14	9,971 468 8560	856 996 6779	0,367 865 6106	0774 9546
1,15	9,969 900 6960	125 290 3489	0,354 326 6779	7627 9272
1,16	9,968 390 9742	191 752 7943	0,340 953 1528	3226 1794
1,17	9,966 938 9805	385 265 6982	0,327 741 2847	4839 2299
1,18	9,965 544 0208	278 942 4567	0,314 687 4437	8886 0621
1,19	9,964 205 4164	565 313 6262	0,301 788 1155	7461 0030
1,20	9,962 922 5038	140 483 5193	0,289 039 8965	9218 8296
1,21	9,961 694 6338	386 986 2929	0,276 439 4897	3219 2051
1,22	9,960 521 1715	645 657 7252	0,263 983 7000	4422 0200
1,23	9,959 401 4956	867 388 4734	0,251 669 4306	9610 0107
1,24	9,958 334 9981	436 138 7302	0,239 493 6791	2593 6794
1,25	9,957 321 0837	155 075 4011	0,227 453 5333	7626 5408

z	$\log \Gamma(z)$		$\psi(z)$	
1,26	9,956 359 1696	388 143 5774	−0,215 546 1686	0026 5182
1,27	9,955 448 6852	349 806 3412	0,203 768 8437	3062 3157
1,28	9,954 589 0715	536 082 8076	0,192 118 8983	0222 1732
1,29	9,953 779 7810	290 385 6417	0,180 593 7494	2036 9178
1,30	9,953 020 2771	498 007 7695	0,169 190 8888	6679 9656
1,31	9,952 310 0341	403 435 2140	0,157 907 8803	3614 1874
1,32	9,951 648 5366	544 970 3876	0,146 742 3567	9599 6017
1,33	9,951 035 2794	801 439 0879	0,135 692 0179	6416 9332
1,34	9,950 469 7672	546 026 1315	0,124 754 6278	9700 3946
1,35	9,949 951 5141	902 540 1627	0,113 928 0126	8308 8296
1,36	9,949 480 0438	099 648 7612	0,103 210 0582	3697 7615
1,37	9,949 054 8886	918 851 5282	0,092 598 7081	8786 1259
1,38	9,948 675 5902	232 172 2697	0,082 091 9618	5840 6487
1,39	9,948 341 6983	625 752 5751	0,071 687 8723	2928 1510
1,40	9,948 052 7714	105 718 7897	0,061 384 5445	8511 6146
1,41	9,947 808 3757	882 873 3374	0,051 180 1337	3789 7756
1,42	9,947 608 0858	232 930 2469	0,041 072 8433	2402 4375
1,43	9,947 451 4835	429 174 2066	0,031 060 9236	7144 7052
1,44	9,947 338 1584	744 573 0981	0,021 142 6703	3353 0475
1,45	9,947 267 7074	520 516 3055	0,011 316 4225	8644 5845
1,46	9,947 239 7344	299 485 6529	0,001 580 5619	8708 3418
1,47	9,947 253 8503	019 093 0853	+0,008 066 4890	1136 4893
1,48	9,947 309 6727	265 039 6072	0,017 626 2683	8884 9468
1,49	9,947 406 8259	580 663 9475	0,027 100 2758	3548 6201
1,50	9,947 544 9406	830 857 3196	0,036 489 9739	7857 6520

z	log Γ(z)	ψ(z)
1,51	9,947 723 6538 618 222 8429	+ 0,045 796 7895 6191 4496
1,52	9,947 942 6085 749 455 0351	0,055 022 1145 7955 1622
1,53	9,948 201 4538 750 006 5798	0,064 167 3073 6607 7154
1,54	9,948 499 8446 425 196 6174	0,073 233 6936 4536 5776
1,55	9,948 837 4414 465 997 3817	0,082 222 5675 3964 4344
1,56	9,949 213 9104 097 814 3536	0,091 135 1925 4063 5189
1,57	9,949 628 9230 770 649 4873	0,099 972 8024 4444 4623
1,58	9,950 082 1562 889 107 6887	0,108 736 6022 5178 1439
1,59	9,950 573 2920 580 773 8191	0,117 427 7690 3501 1042
1,60	9,951 102 0174 501 551 2544	0,126 047 4527 7347 6253
1,61	9,951 668 0244 676 613 6244	0,134 596 7771 5844 5210
1,62	9,952 271 0099 375 678 9859	0,143 076 8403 6898 0212
1,63	9,952 910 6754 021 370 4917	0,151 488 7158 1995 8383
1,64	9,953 586 7270 129 479 7674	0,159 833 4528 8341 5463
1,65	9,954 298 8754 279 998 8466	0,168 112 0775 8432 7804
1,66	9,955 046 8357 117 833 7730	0,176 325 5932 7189 4293
1,67	9,955 830 3272 382 157 9829	0,184 474 9812 6732 9607
1,68	9,956 649 0735 963 406 4632	0,192 561 2014 8913 2418
1,69	9,957 502 8024 986 952 5351	0,200 585 1930 5674 7012
1,70	9,958 391 2456 922 548 0685	0,208 547 8748 7349 3948
1,71	9,959 314 1388 718 645 0668	0,216 450 1461 8960 4789
1,72	9,960 271 2215 960 751 9880	0,224 292 8871 4615 7521
1,73	9,961 262 2372 053 011 9641	0,232 076 9593 0067 2792
1,74	9,962 286 9327 422 222 3320	0,239 803 2061 3509 6466
1,75	9,963 345 0588 743 545 6829	0,247 472 4535 4686 1164

z	$\log \Gamma(z)$		$\psi(z)$	
1,76	9,964 436 3698	187 192 0339	+ 0,255 085 5103	2368 8336
1,77	9,965 560 6232	685 379 8084	0,262 643 1686	0276 2795
1,78	9,966 717 5803	218 910 1417	0,270 146 2043	1488 3540
1,79	9,967 907 0054	122 714 6665	0,277 595 3776	1416 8016
1,80	9,969 128 6662	409 761 4416	0,284 991 4332	9386 1542
1,81	9,970 382 3337	112 727 1250	0,292 335 1011	8877 9580
1,82	9,971 667 7818	642 865 8993	0,299 627 0965	6488 7544
1,83	9,972 984 7878	165 527 1065	0,306 868 1204	9650 1033
1,84	9,974 333 1316	991 794 0601	0,314 058 8602	3156 8639
1,85	9,975 712 5965	985 736 1442	0,321 199 9895	4547 9708
1,86	9,977 122 9684	986 785 1092	0,328 292 1690	8382 0641
1,87	9,978 564 0362	246 764 4771	0,335 336 0466	9448 5409
1,88	9,980 035 5913	881 118 2162	0,342 332 2577	4952 8903
1,89	9,981 537 4283	333 901 3630	0,349 281 4254	5713 5499
1,90	9,983 069 3440	856 111 1078	0,356 184 1611	6405 9720
1,91	9,984 631 1382	996 952 0321	0,363 041 0646	4888 1123
1,92	9,986 222 6132	107 643 7381	0,369 852 7244	0640 1469
1,93	9,987 843 5735	857 393 0651	0,376 619 7179	2349 8793
1,94	9,989 493 8266	761 166 4682	0,383 342 6119	4674 0214
1,95	9,991 173 1821	718 910 9803	0,390 021 9627	4204 3086
1,96	9,992 881 4521	565 884 4947	0,396 658 3163	4666 2402
1,97	9,994 618 4510	633 767 9375	0,403 252 2088	1377 1306
1,98	9,996 383 9956	322 243 2515	0,409 804 1664	4989 0838
1,99	9,998 177 9048	680 732 0161	0,416 314 7060	4541 4956
2,00	0,000 000 0000	000 000 0000	0,422 784 3350	9846 7139

§ **18.** La marche de la fonction $l\Gamma(a)$ nous montre que la fonction $\Gamma(a)$ a un minimum pour une valeur de a comprise entre 1,46 et et 1,47.

La formule

$$l\Gamma(1+a)=\frac{1}{2}\,l\frac{a\pi}{\sin a\pi}-\frac{1}{2}\,l\frac{1+a}{1-a}+(1-\gamma)a-(S_3-1)\frac{a^3}{3}-\ldots$$

permet de trouver une valeur approchée de la position où il y a minimum.

Legendre a trouvé qu'il correspondait à la valeur

$$a=1{,}46163\ 21451\ 105$$

et que l'on a alors

$$l\Gamma(a)=9{,}94723\ 91743\ 9340.$$

La formule élémentaire

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}=-\gamma+\left(1-\frac{1}{a}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{a+1}\right)+\ldots$$

montre au moyen de la méthode de Plana que l'équation $\Gamma'(a)=0$ n'a pas de racines imaginaires et qu'en outre de la racine positive, elle en possède une infinité d'autres toutes négatives, et comprises successivement entre 0 et -1, -1 et -2, ... Les valeurs de la variable auquelles correspondent les maxima ou les minima de la fonction tendent de plus en plus à se rapprocher des pôles.

Partons de l'équation

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}-\frac{\Gamma'(1-a)}{\Gamma(1-a)}=-\pi\cot a\pi$$

et soit, pour une grande valeur de a, $a=-n+x$ la racine de l'équation $\Gamma'(a)=0$ comprise entre $-a+1$ et $-a$. On a pour determiner x la condition

$$\frac{\Gamma'(n+1-x)}{\Gamma(n+1-x)}=\pi\cot\pi x,$$

qui devient, en tenant compte de la valeur approchée,

$$l\Gamma(a+1)=\frac{1}{2}l2\pi-a-\left(a+\frac{1}{2}\right)la,$$

$$l(n-x)+\frac{1}{2(n-x)}=\pi\cot\pi x,$$

ou bien, en négligeant les termes de l'ordre $\frac{1}{n}$,

$$ln=\pi\cot\pi x,$$

$$x=\frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{\pi}{ln}=\frac{1}{ln};$$

on a donc à peu près

$$a=-n+\frac{1}{ln}.$$

C'est à M. Hermite (*J. de Cr.*, t. XCI, p. 336) que l'on doit cette démonstration si élégante. M. Bourguet (*Atti di Torino*, t. XVI p. 758) est revenu sur cette question, il a donné les valeurs correspondant aux deux premiers intervalles

$$x_1=0{,}504072,\qquad x_2=0{,}573587.$$

En général x_1 et x_2 étant deux racines correspondant à deux intervalles consécutifs, la racine correspondant à l'intervalle suivant est comprise entre

$$x_2\quad\text{et}\quad 2x_2-x_1.$$

§ **19.** Nous avons vu précédemment que la fonction $\frac{1}{\Gamma(a)}$ était holomorphe dans tout le plan et par suite développable en série convergente pour toute valeur de a. Occupons-nous de la détermination des coefficients de ce développement.

Posons

$$\frac{1}{\Gamma(a)}=G(a).$$

on a

$$G(a) = \lim n^{-a} a(1+a)\left(1+\frac{a}{2}\right)\dots\left(1+\frac{a}{n}\right).$$

Écrivons

$$\left(1+\frac{a}{2}\right)\dots\left(1+\frac{a}{n}\right) = 1 + A_1 a + A_2 a^2 + \dots + A_{n-1} a^{n-1},$$

le coefficient A_i étant la somme des combinaisons i à i des quantités $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \frac{1}{n}$. Or, on a en général

$$i\Sigma a_1 a_2 \dots a_i = \Sigma a_1 \Sigma a_1 a_2 \dots a_{i-1} - \Sigma a_1^2 \Sigma a_1 a_2 \dots a_{i-2} + \dots \\ \dots + (-1)^{i-1} \Sigma a_i^i,$$

et par suite

$$iA_i = S_1 A_{i-1} - S_2 A_{i-2} + \dots + (-1)^{i-1} S_{i-1};$$

les coefficients A ne dépendent donc que de $S_1, S_2, \dots, S_n$.

D'autre part

$$n^{-a} = 1 - \frac{aln}{1} + \frac{a^2(ln)^2}{2!} - \frac{a^3(ln)^3}{3!} + \dots,$$

et par suite

$$\frac{G(a)}{a(a+1)} = \left[1 - \frac{aln}{1} + \frac{a^2(ln)^2}{2!} - \frac{a^3(ln)^3}{3!} + \dots\right] \\ [1 + A_1 a + A_2 a^2 + \dots + A_n a^n] \\ = 1 + A'_1 a + A'_2 a' + \dots,$$

en posant

$$A'_i = A_i - A_{i-1}\frac{ln}{1} + A_{i-2}\frac{(ln)^2}{2!} + \dots + (-1)^i \frac{(ln)^i}{i!}.$$

Or, si l'on pose

$$-s_1 + ln = C,$$

on a successivement

$$A'_1 = -C,$$
$$2A'_2 = -CA'_1 - s_2,$$
$$3A'_3 = -CA'_2 - s_2 A'_1 + s_3,$$

et en général

$$iA'_i = -CA'_{i-1} - s_2 A'_{i-2} + s_3 A'_{i-3} - \dots + (-1)^{i-1} s_i,$$

et lorsque n augmente indéfiniment on sait, d'après la définition de la constante d'Euler, que

$$C = -s_1 + ln = 1 - \gamma.$$

Les formules précédentes permettent donc de calculer successivement les coefficients cherchés.

Il est facile de faire entrer le facteur $(1 + a)$ dans le développement. Les nouveaux coefficients s'obtiennent par l'addition de deux coefficients consécutifs.

La même méthode s'applique au développement de

$$\frac{1}{a(a+1)}\frac{1}{\Gamma(a)} = e^{-Ca}(1 + A_1 a + A_2 a^2 + \ldots).$$

Les développements précédents permettent de trouver une série pour $\Gamma(a)$ présentant quelque utilité.

On a

$$\Gamma(a) = \frac{1}{a(a+1)}\frac{1}{(1 + A_1 a + A_2 a^2 + \ldots)},$$

les coefficients A étant maintenant connus.

Le facteur

$$\frac{1}{1 + A_1 a + A_2 a^2 + \ldots}$$

ne devient infini pour aucune valeur de a de module moindre que 2; on peut donc développer en série ordonnée suivante les puissances de a dans un cercle de rayon égal à deux et écrire par suite

$$\Gamma(a) = \frac{1}{a(a+1)}(1 + B_1 a + B_2 a^2 + \ldots),$$

les coefficients B devant satisfaire à l'identité :

$$1 = (1 + A_1 a + A_2 a^2 + \ldots)(1 + B_1 a + B_2 a^2 + \ldots).$$

On peut donc déterminer successivement les quantités B par la formule

$$B_i + B_{i-1}A_1 + \ldots + B_1 A_{i-1} + A_i = 0.$$

Nous avons mis $\Gamma(a)$ sous la forme

$$\Gamma(a) = P(a) + Q(a).$$

où $Q(a)$ est une fonction holomorphe; occupons-nous du développement de cette fonction. On a, d'après ce qui a été vu,

$$Q(a) = c_0 + c_1 a + c_2 a^2 + \dots + c_n a^n + \dots,$$

où

$$n!\, c_n = \int_1^\infty e^{-x} (lx)^n \frac{dx}{x}.$$

On peut tout d'abord trouver une limite de c_n. Écrivons

$$c_n = \frac{1}{n!} \int_1^\infty x^{\frac{n}{2}-1} e^{-x} \left(\frac{lx}{\sqrt{x}}\right)^n dx,$$

or, le maximum du facteur $\left(\frac{lx}{\sqrt{x}}\right)^n$ est $\left(\frac{2}{e}\right)^n$, on a donc

$$c_n < \frac{1}{n!} \left(\frac{2}{e}\right)^n \int_1^\infty x^{\frac{n}{2}-1} e^{-x} dx < \left(\frac{2}{e}\right)^n \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(n+1)},$$

ou bien encore, en employant la relation de Gauss-Legendre,

$$c_n < \frac{2}{n} \left(\frac{2}{e}\right)^n \frac{\sqrt{\pi}}{2^n} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)},$$

c'est-à-dire, en remplaçant $\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$ par sa valeur approchée

$$c_n < \frac{\sqrt{2e}}{n} \frac{1}{\left[(n+1)\frac{e}{2}\right]^{\frac{n}{2}}}.$$

Mais pour le calcul des coefficients, il convient d'avoir recours aux développements déjà trouvés.

On a

$$a(a+1)\Gamma(a) = 1 + B_1 a + B_2 a^2 + \dots;$$

mais

$$\begin{aligned}
a(a+1)\Gamma(a) = \Gamma(a+2) &= P(a+2) + Q(a+2) \\
&= P(a+2) + \frac{a+2}{e} a(a+1) Q(a) \\
&= P(a+2) + \left.\begin{matrix} \frac{2}{e} + c_0 \\ + \frac{a}{e} \end{matrix}\right| \left.\begin{matrix} x + c_1 \\ + c_0 \end{matrix}\right| \left.\begin{matrix} x^2 + c_2 \\ + c_1 \end{matrix}\right| x^2 + \dots .
\end{aligned}$$

Le développement de $\mathrm{P}(a+2)$ résulte immédiatement du développement de $\frac{1}{n+a}$ suivant les puissances de a. Égalant alors les coefficients des différentes puissances de a dans les deux expressions de $\Gamma(a+2)$, on a

$$-\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{1}\frac{1}{3^2}+\frac{1}{1.2}\frac{1}{4^2}-\dots\right)+\frac{2}{e}+c_0=\mathrm{B}_1,$$

....

$$(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{2^{n+2}}-\frac{1}{1}\frac{1}{3^{n+2}}+\frac{1}{1.2}\frac{1}{4^{n+2}}-\dots\right)+c_{n-1}+c_n=\mathrm{B}_{n+1}\dots$$

On peut donc calculer successivement c_0, c_1, c_2, ...

Les développements qui précèdent et les calculs auxquels ils conduisent ont été faits par M. Bourguet :

Ann. Ec. Norm.; thèse, p. 38;

Bull. Darboux, t. V_2, p. 43;

Acta Math., t. II, p. 261 ...

Nous reproduisons plus loin ses tableaux de coefficients.

Schlömilch (*Schl. Z.*, t. XXV, p. 337) déduit de la formule

$$\Gamma(1+\rho)=e^{-\gamma\rho}\cdot\frac{e^{\rho}}{1+\rho}\cdot\frac{e^{\frac{\rho}{2}}}{1+\frac{\rho}{2}}\dots$$

la possibilité du développement suivant :

$$\frac{e^{-\rho\gamma}}{\Gamma(1+\rho)}=\mathrm{H}_0+\mathrm{H}_1\rho+\mathrm{H}_2\rho^2+\dots$$

où l'on a

$$\mathrm{H}_0=1,\quad \mathrm{H}_1=0,\quad \mathrm{H}_2=-\frac{\pi^2}{12},\quad m\mathrm{H}_m=\sum_{k=2}^{k=m}(-1)^{k-1}\mathrm{H}_{m-k}\sum_{h=1}^{h=\infty}h^{-k}.$$

Il en déduit

$$\frac{1}{\Gamma(1+\rho)}=\mathrm{K}_0+\mathrm{K}_1\rho+\mathrm{K}_2\rho^2+\dots,$$

$$(m+1)\mathrm{K}^{m+1}=\gamma\mathrm{K}_m-\sum_{k=2}^{k=m+1}(-1)^k\mathrm{K}_{m-k+1}\sum_{h=1}^{h=\infty}h^{-k};$$

il donne également K_n sous forme d'intégrale définie.

Tableau des coefficients A

$$\frac{1}{\Gamma(a)} = a(a+1)\,(1 + A_1 a + A_2 a^2 + \ldots).$$

$A_1 = -0,$	4227	8433	5098	4671
$A_2 = -0,$	2330	9373	6421	7867
$A_3 = +0,$	1910	9110	1387	6915
$A_4 = -0,$	0245	5249	0005	4000
$A_5 = -0,$	0176	4524	4550	1443
$A_6 = +0,$	0080	2327	3022	2673
$A_7 = -0,$	0008	0432	9775	6044
$A_8 = -0,$	0003	6083	7816	2548
$A_9 = +0,$	0001	4559	6142	1399
$A_{10} = -0,$	0000	1754	5859	7517
$A_{11} = -0,$	0000	0258	8995	0224
$A_{12} = +0,$	0000	0133	8501	5466
$A_{13} = -0,$	0000	0020	5474	3152
$A_{14} = -0,$	0000	0000	0159	5268
$A_{15} = +0,$	0000	0000	6275	6218
$A_{16} = -0,$	0000	0000	1273	6143
$A_{17} = +0,$	0000	0000	0092	3397
$A_{18} = +0,$	0000	0000	0012	0028
$A_{19} = -0,$	0000	0000	0004	2202
$A_{20} = +0,$	0000	0000	0000	5240
$A_{21} = -0,$	0000	0000	0000	0140
$A_{22} = -0,$	0000	0000	0000	0067

Tableau des coefficients a

$$\frac{1}{\Gamma(a)} = a + a_2 a^2 + a_3 a^3 + a_4 a^4 + \dots$$

$a_1 = +1,$	0000	0000	0000	0000
$a_2 = +0,$	5772	1566	4901	5329
$a_3 = -0,$	6558	7807	1520	2538
$a_4 = -0,$	0420	0263	5034	0952
$a_5 = +0,$	1665	3861	1382	2915
$a_6 = -0,$	0421	9773	4555	5443
$a_7 = -0,$	0096	2197	1527	8770
$a_8 = +0,$	0072	1894	3246	6630
$a_9 = -0,$	0011	6516	7591	8591
$a_{10} = -0,$	0002	1524	1674	1149
$a_{11} = +0,$	0001	2805	0282	3882
$a_{12} = -0,$	0000	2013	4854	7741
$a_{13} = -0,$	0000	0125	0493	4758
$a_{14} = +0,$	0000	0113	3027	2314
$a_{15} = -0,$	0000	0020	5633	8420
$a_{16} = +0,$	0000	0000	6116	0950
$a_{17} = +0,$	0000	0000	5002	0075
$a_{18} = -0,$	0000	0000	1181	2746
$a_{19} = +0,$	0000	0000	0104	3425
$a_{20} = +0,$	0000	0000	0007	7826
$a_{21} = -0,$	0000	0000	0003	6962
$a_{22} = +0,$	0000	0000	0000	5100
$a_{23} = -0,$	0000	0000	0000	0207

Tableau des coefficients du développement

$$\frac{1}{\Gamma(a)} = e^{-Ca} a(a+1)(1 + A_2 a^2 + A_3 a^3 + \ldots)$$

$C = +0,$	4227	8433	5098	4671
$A_2 = -0,$	3224	6703	3424	1132
$A_3 = +0,$	0673	5230	1053	1981
$A_4 = +0,$	0314	1168	5394	9022
$A_5 = -0,$	0143	3334	5686	2387
$A_6 = +0,$	0004	2566	6389	5753
$A_7 = +0,$	0009	2680	6472	5897
$A_8 = -0,$	0002	1927	6360	3432
$A_9 = -0,$	0000	0265	0983	9844
$A_{10} = +0,$	0000	1021	5199	3474
$A_{11} = -0,$	0000	0185	4328	3265
$A_{12} = -0,$	0000	0000	6534	1544
$A_{13} = +0,$	0000	0005	8247	6956
$A_{14} = -0,$	0000	0001	0048	4862
$A_{15} = +0,$	0000	0000	0251	4687
$A_{16} = +0,$	0000	0000	0188	6871
$A_{17} = -0,$	0000	0000	0035	7806
$A_{18} = +0,$	0000	0000	0002	0025
$A_{19} = +0,$	0000	0000	0000	3314
$A_{20} = -0,$	0000	0000	0000	0878
$A_{21} = +0,$	0000	0000	0000	0069

Tableau des coefficients du développement

$$\Gamma(a) = P(a) + c_0 + c_1 a + c_2 a^2 + \dots$$

$c_0 =$	0,	2193	8393	4395	5203
$c_1 =$	0,	0978	4319	7216	6725
$c_2 =$	0,	0356	0349	1928	4726
$c_3 =$	0,	0110	7089	5446	0110
$c_4 =$	0,	0030	2761	1195	8767
$c_5 =$	0,	0007	4265	8300	4889
$c_6 =$	0,	0001	6575	6256	0585
$c_7 =$	0,	0000	3403	1394	8701
$c_8 =$	0,	0000	0648	2609	8154
$c_9 =$	0,	0000	0115	3713	5309
$c_{10} =$	0,	0000	0019	2937	4300
$c_{11} =$	0,	0000	0003	0464	9169
$c_{12} =$	0,	0000	0000	4560	7157
$c_{13} =$	0,	0000	0000	0649	6268
$c_{14} =$	0,	0000	0000	0088	3033
$c_{15} =$	0,	0000	0000	0011	4985
$c_{16} =$	0,	0000	0000	0001	4247
$c_{17} =$	0,	0000	0000	0000	1814

Tableau des coefficients du développement

$$\Gamma(a) = \frac{1}{a(a+1)}(1 + B_1 a + B_2 a^2 + \ldots).$$

$B_1 = +\,0,$	4227	8433	5098	4671
$B_2 = +\,0,$	4118	4033	0426	4396
$B_3 = +\,0,$	0815	7691	9247	0863
$B_4 = +\,0,$	0742	4901	0753	5137
$B_5 = -\,0,$	0002	6698	2068	7450
$B_6 = +\,0,$	0111	5404	5718	1309
$B_7 = -\,0,$	0028	5264	5821	1553
$B_8 = +\,0,$	0021	0393	3340	6975
$B_9 = -\,0,$	0009	1957	3838	8259
$B_{10} = +\,0,$	0004	9038	8450	8226
$B_{11} = -\,0,$	0002	4094	1435	8311
$B_{12} = +\,0,$	0001	2167	3806	5265
$B_{13} = -\,0,$	0000	6079	2891	3175
$B_{14} = +\,0,$	0000	3045	3557	0349
$B_{15} = -\,0,$	0000	1523	4935	8969
$B_{16} = +\,0,$	0000	0762	1779	6964
$B_{17} = -\,0,$	0000	0381	2110	4003
$B_{18} = +\,0,$	0000	0190	6491	6577

APPLICATIONS DE LA THÉORIE DE LA FONCTION GAMMA

L'intégrale

$$(1) \qquad \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

a reçu le nom d'*intégrale Eulérienne de première espèce.* Suivant une notation adoptée par plusieurs auteurs, nous la désignerons par $B(p, q)$.

La fonction $B(p, q)$ se ramène aisément aux fonctions gamma ou intégrales Eulériennes de seconde espèce.

Cette intégrale est une fonction symétrique de p et de q. Si l'on pose, en effet, $x = 1 - y$, l'intégrale devient

$$\int_0^1 y^{q-1}(1-y)^{p-1}\,dy = B(q,p),$$

et on a donc

$$B(p,q) = B(q,p).$$

Si, dans la formule (1), on pose $x = \frac{z}{1+z}$, on a

$$(2) \qquad B(p,q) = \int_0^\infty \frac{z^{p-1}}{(1+z)^{p+q}}\,dz,$$

et par conséquent aussi, à cause de la symétrie démontrée,

$$(3) \qquad B(p,q) = \int_0^\infty \frac{z^{q-1}}{(1+z)^{p+q}}\,dz.$$

En ajoutant membre à membre les formules (2) et (3), on trouve

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} B(p,q) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{z^{p-1}+z^{q-1}}{(1+z)^{p+q}}\,dz = \frac{1}{2}\int_0^1 &\frac{z^{p-1}+z^{q-1}}{(1+z)^{p+q}}\,dz \\ + \frac{1}{2}\int_1^\infty &\frac{z^{p-1}+z^{q-1}}{(1+z)^{p+q}}\,dz, \end{aligned}\right.$$

et si, dans la seconde intégrale, on fait $z = \frac{1}{y}$, elle devient

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{y^{p-1}+y^{q-1}}{(1+y)^{p+q}}\,dy.$$

Les deux termes du second membre de (4) sont donc égaux, et l'on obtient B (p, q) sous cette nouvelle forme :

$$(5)\qquad B(p,q) = \int_0^1 \frac{z^{p-1}+z^{q-1}}{(1+z)^{p+q}}\,dz.$$

On a entre les fonctions B et les fonctions Γ la relation

$$(6)\qquad B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Si l'on multiplie, en effet, les deux intégrales

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-x} x^{a-1}\,dx,$$

$$\Gamma(b) = \int_0^\infty e^{-y} y^{b-1}\,dy,$$

on obtient

$$\Gamma(a)\,\Gamma(b) = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x} x^{a-1} e^{-y} y^{b-1}\,dx\,dy.$$

Posons

$$x = uv, \qquad y = u(1-v),$$

et il vient

$$\begin{aligned} \Gamma(a)\,\Gamma(b) &= \int_0^\infty\int_0^1 e^{-u} u^{a+b-1} v^{a-1}(1-v)^{b-1}\,du\,dv \\ &= \Gamma(a+b)\int_0^1 v^{a-1}(1-v)^{b-1}\,dv, \end{aligned}$$

et par suite

$$\int_0^1 v^{a-1}(1+v)^{b-1}\,dv = \mathrm{B}(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Si, par exemple, on fait $a+b=1$, on obtient, en prenant B sous la forme (2),

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \int_0^\infty \frac{z^{a-1}\,dz}{1+z}, \tag{7}$$

formule déjà établie précédemment.

On peut ramener aux intégrales Eulériennes de première espèce et par conséquent aux fonctions Γ l'intégrale

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{q-1}\,dx. \tag{8}$$

Si l'on pose, en effet,

$$x^m = y,$$

elle devient

$$\frac{1}{m}\int_0^1 y^{\frac{p}{m}-1}(1-y)^{q-1}\,dy = \frac{1}{m}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p}{m}\right)\Gamma(q)}{\Gamma\left(\frac{p}{m}+q\right)}. \tag{9}$$

On peut au moyen de cette intégrale trouver des relations curieuses.

On a, par exemple,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \int_0^1 (1-x^4)^{\frac{1}{2}-1}\,dx = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{4\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)},$$

$$\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = \int_0^1 x^2(1-x^4)^{\frac{1}{2}-1}\,dx = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{4\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)},$$

et en multipliant ces deux équations membre à membre, on a la relation

$$(10)\qquad \int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^4}}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2}{16\,\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)} = \frac{\pi}{4}.$$

Les recherches sur les intégrales (1) et (8) remontent en réalité à Wallis.

On doit encore citer à ce propos la lettre de Newton à Oldenbourg, du 24 août 1766.

La même question s'offrit à Stirling (*Tractatus... de interpolatione...*, p. 125).

Mais les premiers travaux importants sur l'intégrale

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x^n)^{\frac{q}{n}-1}\,dx$$

sont dus à Euler qui représentait cette intégrale par le symbole $\left(\frac{p}{q}\right)$ (*Nov. Comm. Ac. Petr.*, t. XVI, p. 91) ou bien encore par le symbole $(p.\,q)$ (*Nov. Acta Ac. Petr.*, t. V, p. 86) et qui a traité à différentes reprises des réductions qui existent pour une même valeur de n entre les intégrales correspondant à des valeurs entières et différentes de p et de q.

Legendre (*Exerc.*, t. I, p. 221) adopta tout d'abord le signe $\left(\frac{p}{q}\right)$, puis (*Exerc.*, t. II, p. 3) il montra la réduction de l'intégrale précédente à l'intégrale

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx,$$

pour laquelle il a choisi le symbole $(p,\,q)$.

La notation $\mathrm{B}\,(p,\,q)$ est de Binet (*J. Éc. Pol.*, cah. XXVII) et a été généralement adoptée.

La formule

$$\mathrm{B}(p,q) = \mathrm{B}(q,p)$$

avait été démontrée par Euler dans le cas où l'on a $p+q=1$.

Legendre la démontra d'une façon générale (*Exerc.*, t. I, p. 222).

La réduction des intégrales Eulériennes de première espèce aux fonctions gamma remonte à Euler (*Calc. Int.*, t. IV, p. 93 et p. 252), mais le procédé d'Euler pas plus que celui de Legendre (*Exerc.*, t. II, p. 6) ne présentaient la rigueur nécessaire.

Poisson (*J. Ec. Pol.*, cah. XVI, p. 404) donna une première démonstration rigoureuse; celle qui précède n'est qu'une modification due à Jacobi du procédé de Poisson (*J. de Cr.*, t. XI, p. 307).

On est revenu bien des fois sur cette propriété importante.

Lejeune-Dirichlet, *J. de Cr.*, t. XV, p. 266.

Plana, *J. de Cr.*, t. XVII, p. 25.

Binet, *J. Ec. Pol.*, cah. XXVII, § 15, p. 295.

Cauchy, *J. Ec. Pol.*, cah. XXVIII, p. 147.

Lobatschewski, *Mém. Kasan*, 1835, p. 1.

Schaar, *Mém. Cour. Brux.*, t. XXII.

Catalan, *C. R.*, t. XLVII, p. 545.

Realis, *Battagl. G.*, IX, p. 345.

. . . .

Dans un Mémoire excessivement remarquable, Binet (*J. Ec. Pol.*, cah. XXVII) s'est occupé d'une façon toute particulière des fonctions B considérées indépendamment de la fonction gamma. Il a traité tout au long la question du développement en série de B (p,q). Il a été en même temps amené naturellement à examiner différents développements de la fonction Γ que nous avons eu l'occasion de citer.

§ **21.** Considérons l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1} x \cos^{n-1} x \, dx.$$

Si l'on pose

$$\sin x = y,$$

on trouve

$$(1)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1} x \cos^{n-1} x \, dx = \int_0^1 y^{m-1} (1-y^2)^{\frac{n}{2}-1} dy = \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}.$$

Si en particulier on fait $m = n$, on en déduit

$$(2)\quad \frac{1}{2^{m-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1} 2x \, dx = \frac{1}{2^m} \int_0^{\pi} \sin^{m-1} z \, dz = \frac{\left[\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\right]^2}{2\Gamma(m)}.$$

Mais on a, d'autre part,

$$\int_0^{\pi} \sin^{m-1} z \, dz = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1} z \, dz = \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}.$$

Comparant les deux valeurs de l'intégrale $\int_0^{\pi} \sin^{m-1} z \, dz$ ainsi obtenues et remplaçant $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ par sa valeur, on retrouve la relation de Legendre, cas particulier de la relation de Gauss:

$$2^{m-1} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\, \Gamma(m).$$

La formule (1) s'est présentée à plusieurs auteurs :

Jacobi, *J. de Cr.*, t. XV, p. 1.

Schlömilch, *Gr. Arc.*, t. IV, p. 316.

Oettinger, *J. de Cr.*, t. XXXVIII, p. 162; p. 216.

Ohm, *Bestimmte Int.*, p. 49.

Lobatschewski, *Mém. Kasan*, 1835, p. 211.

Bonnet, *J. de Liou.*, t. VI, p. 238.

Raabe, *Integr. Rech.*, p. 222.

On a

$$(3)\quad \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{(x+a)^{\alpha+\beta}} dx = \frac{1}{a^{\beta}(1+a)^{\alpha}} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Posons, en effet,

$$\frac{x}{1-x} = y,$$

et l'intégrale devient

$$\int_0^\infty \frac{y^{\alpha-1}}{[(1+a)y+a]^{\alpha+\beta}}\,dy,$$

et en faisant

$$(1+a)y = az,$$

on obtient

$$\frac{1}{a^\beta(1+a)^\alpha}\int_0^\infty \frac{z^{\alpha-1}}{(1+z)^{\alpha+\beta}}\,dz = \frac{1}{a^\beta(1+a)^\alpha}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Si l'on suppose $\alpha+\beta = 1$, on a

$$(4)\quad \int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^\alpha x^{1-\alpha}(x+a)} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{a^{1-\alpha}(1+a)^\alpha} = \frac{\pi}{\sin\alpha\pi . a^{1-\alpha}(1+a)^\alpha}.$$

Si dans l'équation (1) on fait $x = \cos^2\theta$, on a

$$(5)\qquad 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2\alpha-1}\theta\sin^{2\beta-1}\theta}{(a+\cos^2\theta)^{\alpha+\beta}}\,d\theta = \frac{1}{a^\beta(1+a)^\alpha}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+b)},$$

qui peut s'écrire, en posant $a+1 = mk$, $a = nk$,

$$(6)\qquad 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2\alpha-1}\theta\sin^{2\beta-1}\theta}{(m\cos^2\theta + n\cos^2\theta)^{\alpha+\beta}}\,d\theta = \frac{1}{m^\alpha n^\beta}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Les formules (3) et (4) ont été données par Abel (*J. de Cr.*, t. II, p. 22).

Pour la formule (6) voir Schlömilch (*Höhere Analysis*, p. 85).

L'expression de $\psi(a+1)$ sous forme d'intégrale définie conduit à la détermination au moyen de fonctions gamma de quelques intégrales remarquables.

On a

$$(7)\qquad \frac{dl\Gamma(a+1)}{da}=\int_0^1\left(\frac{1}{l\frac{1}{x}}-\frac{x^a}{1-x}\right)dx,$$

et en changeant a en $a+b$, b désignant une constante positive,

$$\frac{dl\Gamma(a+b+1)}{da}=\int_0^1\left(\frac{1}{l\frac{1}{x}}-\frac{x^{a+b}}{1-x}\right)dx,$$

et, par soustraction,

$$\frac{d}{da}\,l\frac{\Gamma(a+b+1)}{\Gamma(a+1)}=\int_0^1 x^a\frac{1-x^b}{1-x}\,dx.$$

En intégrant relativement à a entre les limites 0 et a, on en déduit

$$(8)\qquad l\frac{\Gamma(a+b+1)}{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}=\int_0^1\frac{(1-x^a)(1-x^b)}{(1-x)\,l\frac{1}{x}}\,dx.$$

On a de même :

$$l\frac{\Gamma(a+b+c+1)}{\Gamma(a+c+1)\Gamma(b+1)}=\int_0^1\frac{(1-x^{a+c})(1-x^b)}{(1-x)\,l\frac{1}{x}}\,dx,$$

et par soustraction

$$(9)\qquad l\frac{\Gamma(a+1)\,\Gamma(a+b+c+1)}{\Gamma(a+b+1)\,\Gamma(a+c+1)}=\int_0^1\frac{x^a(1-x^b)(1-x^c)}{(1-x)\,l\frac{1}{x}}\,dx.$$

Dans l'équation (8) changeons a en c et soustrayons membre à membre les équations (8) ainsi transformée et (9), il vient :

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} & l\frac{\Gamma(a+b+1)\,\Gamma(a+c+1)\,\Gamma(b+c+1)}{\Gamma(a+1)\,\Gamma(b+1)\,\Gamma(c+1)\,\Gamma(a+b+c+1)} \\ & \qquad =\int_0^1\frac{(1-x^a)(1-x^b)(1-x^c)}{(1-x)\,l\frac{1}{x}}\,dx.\end{aligned}\right.$$

En continuant d'appliquer le même procédé, on arrive d'une façon générale à exprimer au moyen des fonctions gamma les intégrales

$$(11)\qquad \int_0^1 \frac{(1-x^a)(1-x^b)\dots}{(1-x)\,l\,\frac{1}{x}}\,dx$$

et

$$(12)\qquad \int_0^1 \frac{x^a(1-x^b)(1-x^c)\dots}{(1-x)\,l\,\frac{1}{x}}\,dx,$$

quel que soit le nombre des facteurs qui apparaissent au numérateur.

Si dans l'équation (9) on remplace x par x^2, on obtient la formule

$$(13)\qquad \int_0^1 \frac{x^{2a+1}(1-x^{2b})(1-x^{2c})}{(1-x^2)\,lx}\,dx = l\,\frac{\Gamma(a+b+1)\,\Gamma(a+c+1)}{\Gamma(a+1)\,\Gamma(a+b+c+1)},$$

et, en faisant $c=\frac{1}{2}$,

$$(14)\qquad \int_0^1 \frac{x^{2a+1}(1-x^{2b})}{(1+x)\,lx}\,dx = l\,\frac{\Gamma(a+b+1)\,\Gamma\left(a+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(a+1)\,\Gamma\left(a+b+\frac{3}{2}\right)},$$

ou bien, si l'on fait $2a+1=\alpha-1$, $2(a+b)+1=\beta-1$,

$$(15)\qquad \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}-x^{\beta-1}}{(1+x)\,lx} = l\,\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)}.$$

La formule générale (12) fournit la relation suivante

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int_0^1 \frac{x^a(x-1)^n}{lx}\,dx \\ &\quad = \sum_0^n (-1)^p\,\frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!}\,l(n+a+1-p) \end{aligned}\right.$$

lorsqu'on y fait $b = c = d = \ldots = 1$, et que l'on emploie la relation $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$.

En posant $l\frac{1}{x} = z$, et $a+1 = p$, la formule précédente devient :

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} &-\int_0^\infty \frac{e^{-az}(e^{-z}-1)^n dz}{z} \\ &= \sum_0^n (-1)^p \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{p!}\, l(n+a+1-p). \end{aligned}\right.$$

Des cas particuliers des formules (7) à (12) avaient été donnés par

Legendre, *Exerc.*, t. II, p. 111.

Cisa de Grésy, *Mém. Turin*, 1821, p. 209.

Binet, *J. Ec. Pol.*, cah. XXVII, p. 123.

Mais c'est à Stern (*Gött. Studien*, 1847) que sont dues les formules générales.

Kummer (*J. de Cr.*, t. XVII, p. 210) avait donné la formule (15).

§ **22**. Occupons-nous maintenant des intégrales

$$(1)\qquad \int_0^\infty \frac{\cos bx}{x^n}\,dx,\qquad \int_0^\infty \frac{\sin bx}{x^n}\,dx.$$

Nous partirons de la formule

$$\frac{1}{x^n} = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty z^{n-1}e^{-zx}\,dz,$$

qui donne

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx}{x^n}\,dx = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty \cos bx\,dx\int_0^\infty e^{-zx}z^{n-1}\,dz,$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x^n}\,dx = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty \sin bx\,dx\int_0^\infty e^{-zx}z^{n-1}\,dz;$$

ou bien, en changeant l'ordre des intégrations,

$$(2)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos bx}{x^n}\,dx = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty z^{n-1}\,dz \int_0^\infty e^{-zx}\cos bx\,dx, \\ \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x^n}\,dx = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty z^{n-1}\,dz \int_0^\infty e^{-zx}\sin bx\,dx. \end{cases}$$

Or, l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a}$$

donne, en y faisant $a = z - bi$,

$$(3)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty e^{-zx}\cos bx\,dx = \frac{z}{b^2+z^2}, \\ \displaystyle\int_0^\infty e^{-zx}\sin bx\,dx = \frac{b}{b^2+z^2}, \end{cases}$$

en sorte qu'il vient :

$$(4)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos bx}{x^n}\,dx = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty \frac{z^n}{b^2+z^2}\,dz, \\ \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x^n}\,dx = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty \frac{bz^{n-1}}{b^2+z^2}\,dz; \end{cases}$$

et en posant $z^2 = b^2u$, les intégrales des seconds membres se ramènent à des intégrales connues, et l'on a enfin :

$$(5)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos bx}{x^n}\,dx = \frac{b^{n-1}}{\Gamma(n)}\,\frac{\pi}{2\cos\frac{n\pi}{2}}, \\ \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x^n}\,dx = \frac{b^{n-1}}{\Gamma(n)}\,\frac{\pi}{2\sin\frac{n\pi}{2}}. \end{cases}$$

La première de ces formules suppose n compris entre 0 et 1, et la seconde le suppose compris entre 0 et 2. Dans tous les autres cas, les intégrales sont infinies.

On peut distinguer comme cas particuliers ceux où $\Gamma(n)$ s'exprime sous forme finie.

En faisant $n = 1$, on a,

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}. \tag{6}$$

En faisant $n = \frac{1}{2}$,

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^\infty \frac{\sin bx}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2b}}. \tag{7}$$

La formule (6) était connue depuis longtemps.

Euler, *Calc. Int.*, t. IV, p. 139.
Mascheroni, *Adnot.*, p. 52.
Bidone, *Mém. Turin*, 1812, p. 231.
Fourier, *Chaleur*, p. 415.
Laplace, *Prob.*, p. 229.
Lobatschewski, *Mém. Kasan*, 1835, p. 211.
— *J. de Cr.*, t. XXIV, p. 164.
Schlömilch, *Gr. Arc.*, t. I, p. 417.
— *J. de Cr.*, t. XXXVI, 268.

Il en est de même des formules (7).

Legendre, *Exerc.*, t. I, p. 369.
Bidone, *Mém. Turin*, 1812, p. 231.
Cisa de Grésy, *Mém. Turin*, 1821, p. 209.
Plana, *Mém. Bruxelles*, 1837.
Oettinger, *J. de Cr.*, t. XXXVIII, p. 216.

A l'égard des formules (3) nous renverrons à

Poisson, *J. Ec. Pol.*, cah. XVI, p. 225.
Grunert, *J. de Cr.*, t. VIII, p. 416.
Lobatto, *J. de Cr.*, t. XI, p. 169.
Boncompagni, *J. de Cr.*, t. XXV, p. 74.
Oettinger, *J. de Cr.*, t. XXXVIII, p. 216.

Enfin, les intégrales (5) ont été données par Schlömilch (*Gr. Arc.*, t. VI, p. 200. — *Studien*, t. I, p. 13).

Les intégrales

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-ax}\cos bx\,dx,\\ &\int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-ax}\sin bx\,dx,\end{aligned}\right.$$

peuvent s'obtenir de la manière suivante. Partons encore de la formule

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}x^{\mu-1}\,dx=\frac{\Gamma(\mu)}{\alpha^\mu},$$

et pour $\alpha=a+bi$, il viendra

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-ax}x^{\mu-1}(\cos bx+\sqrt{-1}\sin bx)\,dx&=\frac{\Gamma(\mu)}{(a+bi)^\mu}\\ &=\frac{\Gamma(\mu)(a-bi)^\mu}{(a^2+b^2)^\mu}.\end{aligned}$$

Posons $a=\rho\cos\theta$, $b=\rho\sin\theta$; cette formule donne, en égalant les parties réelle et imaginaire,

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,x^{\mu-1}\,dx=\frac{\Gamma(\mu)}{\rho^\mu}\cos\mu\theta,\\ &\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,x^{\mu-1}\,dx=\frac{\Gamma(\mu)}{\rho^\mu}\sin\mu\theta.\end{aligned}\right.$$

Si l'on fait en particulier $a=0$, on a $\theta=\frac{\pi}{2}$ et $\rho=b$, on a

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int_0^\infty \cos bx\,x^{\mu-1}\,dx=\frac{\Gamma(\mu)}{b^\mu}\cos\mu\frac{\pi}{2},\\ &\int_0^\infty \sin bx\,x^{\mu-1}\,dx=\frac{\Gamma(\mu)}{b^\mu}\sin\mu\frac{\pi}{2},\end{aligned}\right.$$

qui ne sont autres que les formules (4) trouvées précédemment.

Les formules (9) peuvent s'écrire sous une autre forme; on a

$$b=a\operatorname{tg}\theta,$$

$$\rho^2=b^2\left(1+\frac{1}{\operatorname{tg}^2\theta}\right)=\frac{b^2}{\sin^2\theta},$$

et elles deviennent

$$(11)\quad \left\{ \begin{aligned} \int_0^\infty e^{-ax} \cos bx\, x^{\mu-1}\, dx &= \frac{\Gamma(\mu)}{b^\mu} \sin^\mu\theta \cos\mu\theta \\ &= \frac{\Gamma(\mu)}{a^\mu} \cos^\mu\theta \cos\mu\theta, \\ \int_0^\infty e^{-ax} \sin bx\, x^{\mu-1}\, dx &= \frac{\Gamma(\mu)}{b^\mu} \sin^\mu\theta \sin\mu\theta \\ &= \frac{\Gamma(\mu)}{a^\mu} \cos^\mu\theta \sin\mu\theta. \end{aligned} \right.$$

Désignons par n un nombre positif moindre que l'unité et plus petit en même temps que μ. Multiplions les deux membres de chacune des équations (11) par

$$b^{n-1}\, db = a^n \operatorname{tg}^{n-1}\theta \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

et intégrons de $b=0$ jusqu'à $b=\infty$ et par conséquent de $\theta=0$ à $\theta=\frac{\pi}{2}$, on a, en changeant l'ordre des intégrations dans les premiers membres,

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-ax}\, dx \int_0^\infty b^{n-1} \cos bx\, db \\ &\qquad = \frac{\Gamma(\mu)}{a^{\mu-n}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\mu-n-1}\theta \sin^{n-1}\theta \cos\mu\theta\, d\theta, \\ &\int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-ax}\, dx \int_0^\infty b^{n-1} \sin bx\, db \\ &\qquad = \frac{\Gamma(\mu)}{a^{\mu-n}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\mu-n-1}\theta \sin^{n-1}\theta \sin\mu\theta\, d\theta. \end{aligned}$$

Mais, d'après les formules établies précédemment, on a

$$\begin{aligned} \int_0^\infty b^{n-1} \cos bx\, db &= \frac{\Gamma(n)}{x^n} \cos\frac{n\pi}{2}, \\ \int_0^\infty b^{n-1} \sin bx\, db &= \frac{\Gamma(n)}{x^n} \sin\frac{n\pi}{2}, \end{aligned}$$

et les premiers membres deviennent

$$\Gamma(n) \cos\frac{n\pi}{2} \int_0^\infty x^{\mu-n-1} e^{-ax}\, dx = \frac{\Gamma(\mu-n)\Gamma(n)\cos\frac{n\pi}{2}}{a^{\mu-n}},$$

$$\Gamma(n)\sin\frac{n\pi}{2}\int_0^\infty x^{\mu-n-1}e^{-ax}\,dx=\frac{\Gamma(\mu-n)\,\Gamma(n)\sin\dfrac{n\pi}{2}}{a^{\mu-n}}.$$

On arrive ainsi à l'évaluation des intégrales suivantes :

$$(12)\quad\begin{cases}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\mu-n-1}\theta\,\sin^{n-1}\theta\cos\mu\theta\,d\theta=\frac{\Gamma(\mu-n)\,\Gamma(n)}{\Gamma(\mu)}\cos\frac{n\pi}{2},\\[2ex] \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\mu-n-1}\theta\,\sin^{n-1}\theta\sin\mu\theta\,d\theta=\frac{\Gamma(\mu-n)\,\Gamma(n)}{\Gamma(\mu)}\sin\frac{n\pi}{2}.\end{cases}$$

Si l'on suppose $n=\mu-1$, on a

$$\Gamma(\mu-n)=1,\qquad\Gamma(n)=\frac{\Gamma(\mu)}{\mu-1},$$

et il vient

$$(13)\quad\begin{cases}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\mu-2}\theta\cos\mu\theta\,d\theta=\frac{1}{\mu-1}\sin\frac{\mu\pi}{2},\\[2ex] \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\mu-2}\theta\sin\mu\theta\,d\theta=\frac{1}{\mu-1}\cos\frac{\mu\pi}{2}.\end{cases}$$

Dans les formules (12) n est compris entre 0 et 1 ; si l'on fait en particulier $n=1$, on a

$$(14)\quad\begin{cases}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\mu-2}\theta\cos\mu\theta\,d\theta=0,\\[2ex] \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\mu-2}\theta\sin\mu\theta\,d\theta=\frac{1}{\mu-1}.\end{cases}$$

En ce qui concerne les formules (9) et (10) il convient de citer :

Euler, *Cal. Int.*, t. IV, p. 134.
Lacroix, *Calc. Dif.*, t. III, p. 490.
Legendre, *Exerc.*, t. I, p. 367.
Cauchy, *J. Ec. Pol.*, cah. XXVIII, p. 147.
— *Exerc.*, 1826, p. 38.
Fuss, *Mém. Pétersb.*, 1830.
Plana, *Mém. Brux.*, 1837.
Grunert, *J. de Cr.*, t. VIII, p. 146.

Liouville, *J. de Cr.*, t. XIII, p. 210.

Schlömilch, *Gr. Arc.*, t. VI, p. 200.

Oettinger, *J. de Cr.*, t. XXXVIII, p. 216.

Les formules (12), (13) et (14) ont été données par Serret (*J. de Liou.*, t. VIII, p. 489) et se sont présentées à Kummer (*J. de Cr.*, t. XVII, p. 210 et t. XX, p. 1) et à Schlömilch (*Studien*, t. I, p. 24).

Il nous est impossible de donner même un résumé de toutes les intégrales définies dont l'évaluation peut être faite au moyen de la fonction gamma. Il suffit de jeter un coup d'œil, par exemple, sur les *Tables d'intégrales définies* de Bierens de Haan, pour reconnaître combien est grand le nombre de ces intégrales. Elles se rencontrent à chaque pas dans les travaux de Poisson, Cauchy, Kummer, Dirichlet, Oettinger, Schlömilch... Voir en particulier Meyer, *Vorlesungen über die Theorie du bestimmten Integrale*, 1871, p. 159-229.

§ **53.** Considérons l'intégrale multiple

$$(1) \qquad u = \int\int\ldots\int x_1^{p_1-1}\, x_2^{p_2-1} \ldots x_n^{p_n-1}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

étendue à toutes les valeurs positives des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, qui vérifient la condition

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqq 1,$$

les nombres $p_1, p_2, \ldots, p_n$ étant tous positifs. On a d'une façon générale

$$(2) \qquad u = \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\ldots\Gamma(p_n)}{\Gamma(1+p_1+p_2+\ldots+p_n)}.$$

Tout d'abord, pour $n = 1$, on a

$$u = \int_0^1 x_1^{p_1-1}\, dx_1 = \frac{1}{p_1} = \frac{\Gamma(p_1)}{\Gamma(1+p_1)}.$$

Pour $n = 2$,

$$u = \int_0^1 x_1^{p_1-1}\,dx_1 \int_0^{1-x_1} x_2^{p_2-1}\,dx_2 = \int_0^1 x_1^{p_1-1}\,dx_1\,\frac{(1-x_1)^{p_2}}{p_2}$$

$$= \frac{\Gamma(p_2)}{\Gamma(1+p_2)}\,B(p_1,\ 1+p_2) = \frac{\Gamma(p_2)}{\Gamma(1+p_2)}\,\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(1+p_2)}{\Gamma(1+p_1+p_2)},$$

$$u = \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)}{\Gamma(1+p_1+p_2)},$$

la formule est donc vraie pour $n = 2$.

Pour $n = 3$, on a

$$u = \int_0^1 x_1^{p_1-1}\,dx_1 \int_0^{y_2} x_2^{p_2-1}\,dx_2 \int_0^{y_3} x_3^{p_3-1}\,dx_3,$$

en posant $y_2 = 1 - x_1$, $y_3 = 1 - x_1 - x_2$. Si l'on pose

$$x_3 = y_3 z_3, \qquad x_2 = y_2 z_2,$$

l'intégrale peut s'écrire sous la forme

$$u = \int_0^1 x_1^{p_1-1}\,dx \int_0^1 y_2^{p_2} z_2^{p_2-1}\,dz_2 \int_0^1 y_3^{p_3} z_3^{p_3-1}\,dz_3,$$

ou bien, puisque l'on a

$$y_2 = 1 - x_1, \qquad y_3 = 1 - x_1 - y_2 z_2 = (1-x_1)(1-z_2),$$

$$u = \int_0^1 x_1^{p_1-1}\,dx \int_0^1 (1-x_1)^{p_2} z_2^{p_2-1}\,dz_2 \int_0^1 (1-x_1)^{p_3}(1-z_2)^{p_3} z_3^{p_3-1}\,dz_3$$

$$= \int_0^1 x_1^{p_1-1}(1-x_1)^{p_2+p_3}\,dx_1 \int_0^1 z_2^{p_2-1}(1-z_2)^{p_3} \int_0^1 z_3^{p_3-1}\,dz_3$$

$$= B(p_1,\ 1+p_2+p_3)\,B(p_2,\ 1+p_3)\cdot\frac{1}{p_3}$$

$$= \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(1+p_2+p_3)}{\Gamma(1+p_1+p_2+p_3)}\cdot\frac{\Gamma(p_2)\Gamma(1+p_3)}{\Gamma(1+p_2+p_3)}\,\frac{\Gamma(p_3)}{\Gamma(1+p_3)}$$

$$= \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\Gamma(p_3)}{\Gamma(1+p_1+p_2+p_3)}.$$

D'une façon générale, on posera

$$1 - x_1 = y_2, \qquad y_2 - x_2 = y_3,\ \ldots,\ y_{n-1} - x_{n-1} = y_n,$$

puis

$$x_n = y_n z_n, \quad x_{n-1} = y_{n-1} z_{n-1}, \quad \dots, \quad x_2 = y_2 z_2,$$

et l'intégrale multiple se trouvera décomposée en un produit d'intégrales que l'on sait évaluer séparément. On trouve ainsi

$$u = \mathrm{B}(p_1, 1 + p_2 + \dots + p_n)\,\mathrm{B}(p_2, 1 + p_3 + \dots + p_n)\dots$$
$$\dots\,\mathrm{B}(p_{n-1}, 1 + p_n)\cdot\frac{1}{p_n},$$

et, en remplaçant les fonctions B au moyen des fonctions Γ et supprimant les facteurs communs au numérateur et au dénominateur, on a précisément la formule (2).

Soit maintenant l'intégrale

$$(3) \qquad v = \iint\dots\int t_1^{q_1-1}\,t_2^{q_2-1}\dots t_n^{q_n-1}\,dt_1\,dt_2\dots dt_n$$

étendue à toutes les valeurs positives de t_1, t_2, ..., t_n, pour lesquelles on a

$$\left(\frac{t_1}{a_1}\right)^{m_1} + \left(\frac{t_2}{a_2}\right)^{m_2} + \dots + \left(\frac{t_n}{a_n}\right)^{m_n} \leqq 1,$$

q_1, q_2, ..., q_n, m_1, m_2, ..., m_n, a_1, a_2, ..., a_n étant des constantes positives.

Si l'on pose, d'une façon générale,

$$\left(\frac{t}{a}\right)^m = x, \quad t = a x^{\frac{1}{m}}, \quad dt = \frac{a}{m} x^{\frac{1}{m}-1}\,dx,$$

il vient

$$v = \frac{a_1^{q_1} a_2^{q_2}\dots a_n^{q_n}}{m_1 m_2 \dots m_n}\iint\dots\int x_1^{\frac{q_1}{m_1}-1}\,x_2^{\frac{q_2}{m_2}-1}\dots x_n^{\frac{q_n}{m_n}-1}\,dx_1\,dx_2\dots dx_n.$$

où

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \leqq 1.$$

On a donc

$$(4) \qquad v = \frac{a_1^{q_1} a_2^{q_2}\dots a_n^{q_n}}{m_1 m_2\dots m_n}\,\frac{\Gamma\left(\frac{q_1}{m_1}\right)\Gamma\left(\frac{q_2}{m_2}\right)\dots\Gamma\left(\frac{q_n}{m_n}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{q_1}{m_1} + \frac{q_2}{m_2} + \dots + \frac{q_n}{m_n}\right)}.$$

Lejeune-Dirichlet a le premier réduit les intégrales multiples que nous venons d'étudier aux fonctions gamma.

Abh. Ak. Wiss. Berlin, 1839.

J. de Liou., t. IV, p. 164.

La démonstration qu'il donne est différente de celle que nous avons exposée et qui est due à Liouville (*J. de Liou.*, t. IV, p. 225).

La formule de Dirichlet dans le cas de trois variables fournit une détermination élégante des volumes, des centres de gravité, des moments d'inertie de toute une série de surfaces. Considérons par exemple l'ellipsoïde

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1,$$

on aura pour le huitième de son volume

$$V = \iiint dx\,dy\,dz = \frac{abc}{8}\,\frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^3}{\Gamma\left(1+\frac{3}{2}\right)},$$

et, en s'appuyant sur l'expression connue de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

$$V = \frac{1}{6}\pi abc.$$

Considérons la surface

$$\left(\frac{x}{a}\right)^4 + \left(\frac{y}{b}\right)^4 + \left(\frac{z}{c}\right)^4 = 1,$$

on a alors

$$V = \iiint dx\,dy\,dz = \frac{abc}{64}\,\frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^3}{\Gamma\left(1+\frac{3}{4}\right)} = \frac{abc}{3.16}\,\frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^3}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)};$$

mais, d'après la relation des compléments,

$$\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2;$$

en sorte qu'on peut écrire

$$(5) \qquad V = \frac{abc\sqrt{2}}{3.16}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)}\right]^2 = \frac{abc\sqrt{2}}{3} l^2$$

en posant :

$$4l = \int_0^1 x^{-\frac{3}{4}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\, dx,$$

ou encore, en remplaçant x par y^4,

$$l = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}.$$

Or, si l'on considère la lemniscate de Bernoulli $\rho^2 = \cos 2\theta$, on a pour l'arc compris entre un sommet et l'origine

$$l = \int_0^1 \sqrt{\rho^2 \frac{d\theta^2}{d\rho^2} + 1}\; d\rho,$$

mais

$$\frac{d\theta^2}{d\rho^2} = \frac{\rho^2}{\sin^2 2\theta} = \frac{\rho^2}{1-\rho^4},$$

et il vient

$$l = \int_0^1 \frac{d\rho}{\sqrt{1-\rho^4}}.$$

La formule (5) représente donc le huitième du volume de la surface considérée, si l'on y désigne par l le quart de la longueur de la lemniscate $\rho^2 = \cos 2\theta$.

D'une façon plus générale, comme il a été déjà dit, la formule de Dirichlet est très utile dans l'évaluation des intégrales qui se présentent en mécanique, ou plutôt dans la géométrie des masses.

Lejeune-Dirichlet (*J. de Liou.*, t. IV, p. 164) a aussi appliqué la même méthode à la détermination de l'attraction de l'ellipsoïde homogène. Ses résultats ont été généralisés par :

Mehler, *J. de Cr.*, t. LX, p. 321 ...
Mertens, *J. de Cr.*, t. LXIII, p. 360 ... et t. LXX, p. 1 ...
Grube, *J. de Cr.*, t. LXIX, p. 359 ...

Arrivons maintenant à des intégrales multiples d'un caractère plus général que celles examinées jusqu'ici.

Soit

$$W = \iint \ldots f(x+y+z+\ldots)\, x^{k-1} y^{l-1} z^{m-1} \ldots dx\, dy\, dz \ldots,$$

une intégrale multiple où les variables indépendantes x, y, z, ... sont toutes positives et satisfont à la condition

$$x+y+z+\ldots < h,$$

h étant une constante positive; de plus f est une fonction de x, y, z, ... assujettie à la seule condition que l'intégrale considérée ait une signification. On suppose que k, l, m, ... sont des constantes positives.

Pour trouver la valeur de cette intégrale, nous partirons des cas les plus simples et nous supposerons d'abord $n = 2$.

Si dans l'intégrale

$$W = \int_0^h x^{k-1}\, dx \int_0^{h-x} f(x+y)\, y^{l-1}\, dy$$

on pose, comme nous l'avons déjà fait pour la réduction des fonctions B aux fonctions Γ,

$$x = uv, \qquad y = u(1-v),$$

il vient

$$W = \int_0^h du \int_0^1 u^{k-1} v^{k-1} f(u)\, u^{l-1} (1-v)^{l-1}\, u\, dv,$$

$$= \int_0^h u^{k+l-1} f(u)\, du \int_0^1 v^{k-1} (1-v)^{l-1}\, dv,$$

et par suite

$$W = \frac{\Gamma(k)\,\Gamma(l)}{\Gamma(k+l)} \int_0^h f(u)\, u^{k+l-1}\, du.$$

Considérons l'intégrale triple, on a

$$W = \int_0^h x^{k-1}\,dx \int_0^{y_1} y^{l-1}\,dy \int_0^{y_1-y} f(x+y+z)\,z^{m-1}\,dz,$$

en désignant par y_1 la quantité $h-x$. Mais on a, d'après la formule établie précédemment,

$$\int_0^{y_1} y^{l-1}\,dy \int_0^{y_1-y} f(x+y+z)\,z^{m-1}\,dz$$
$$= \frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)}{\Gamma(l+m)} \int_0^{y_1} f(x+u)\,u^{l+m-1}\,du,$$

donc

$$W = \frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)}{\Gamma(l+m)} \int_0^h x^{k-1}\,dx \int_0^{h-x} f(x+u)\,u^{l+m-1}\,du,$$

et la formule déjà établie s'applique à l'intégrale double qui apparaît dans le second membre, en sorte qu'il vient enfin :

$$W = \frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)\,\Gamma(k)\,\Gamma(l+m)}{\Gamma(l+m)\,\Gamma(k+l+m)} \int_0^h f(w)\,w^{k+l+m-1}\,dw$$
$$= \frac{\Gamma(k)\,\Gamma(l)\,\Gamma(m)}{\Gamma(k+l+m)} \int_0^h f(w)\,w^{k+l+m-1}\,dw.$$

La méthode s'applique à une intégrale d'ordre quelconque de multiplicité, et l'on a

$$(6)\quad \begin{cases} W = \displaystyle\iint \ldots f(x+y+z+\ldots)\,x^{k-1}\,y^{l-1}\,z^{m-1}\ldots dx\,dy\,dz\ldots \\ \quad = \dfrac{\Gamma(k)\,\Gamma(l)\,\Gamma(m)\ldots}{\Gamma(k+l+m+\ldots)} \displaystyle\int_0^h f(\theta)\,\theta^{k+l+m+\ldots-1}\,d\theta, \end{cases}$$

en supposant

$$0 < x+y+z+\ldots < h.$$

Si l'on fait $h=1$ et $f(\theta)=1$, on retrouve la formule établie

précédemment. Comme alors, on peut obtenir la formule plus générale

$$(7)\left\{\begin{aligned}&\iint\cdots f\left[\left(\frac{x}{a}\right)^p+\left(\frac{y}{b}\right)^q+\left(\frac{z}{c}\right)^r+\ldots\right]x^{k-1}y^{l-1}z^{m-1}\ldots dx\,dy\,dz\ldots\\&=\frac{a^k b^l c^m\ldots}{pqr\ldots}\,\frac{\Gamma\left(\frac{k}{p}\right)\Gamma\left(\frac{l}{q}\right)\Gamma\left(\frac{m}{r}\right)\ldots}{\Gamma\left(\frac{k}{p}+\frac{l}{q}+\frac{m}{r}+\ldots\right)}\int_0^h f(\theta)\,\theta^{\frac{k}{p}+\frac{l}{q}+\frac{m}{r}+\ldots-1}\,d\theta,\end{aligned}\right.$$

k, l, m, … p, q, r, … x, y, z, … étant des quantités toutes positives, les dernières étant assujetties à la condition

$$\left(\frac{x}{a}\right)^p+\left(\frac{y}{b}\right)^q+\left(\frac{z}{c}\right)^r+\ldots<h.$$

Si $f(\theta)$ est une fonction telle que l'intégrale

$$\int_0^h f(\theta)\,\theta^{k+l+m+\ldots-1}\,d\theta$$

conserve un sens lorsque h augmente indéfiniment, on peut dans la formule précédente faire croître h au delà de toute limite. Remplaçons alors les quantités $a, b, c, \ldots$ par $\sqrt[p]{\frac{1}{a}}, \sqrt[q]{\frac{1}{b}}, \sqrt[r]{\frac{1}{c}}, \ldots$ et θ par θ^2, on obtient alors l'expression

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\int_0^\infty\ldots f(ax^p+by^q+cz^r+\ldots)\,x^{k-1}y^{l-1}z^{m-1}\ldots dx\,dy\,dz\ldots\\&=\frac{2}{pqr\ldots a^{\frac{k}{p}}b^{\frac{l}{q}}c^{\frac{m}{r}}\ldots}\,\frac{\Gamma\left(\frac{k}{p}\right)\Gamma\left(\frac{l}{q}\right)\Gamma\left(\frac{m}{r}\right)\ldots}{\Gamma\left(\frac{k}{p}+\frac{l}{q}+\frac{m}{r}\right)}\\&\times\int_0^\infty f(\theta^2)\,\theta^{2\left(\frac{k}{p}+\frac{l}{q}+\frac{m}{r}+\ldots\right)-1}\,d\theta.\end{aligned}$$

Liouville (*J. de Liou.*, t. IV, p. 225 …) donna la généralisation des théorèmes de réduction des intégrales multiples aux fonctions gamma et les nouvelles propositions auxquelles il arriva furent

elles-mêmes bientôt généralisées et trouvèrent un grand nombre d'applications. Nous citerons:

Raabe, *Reduction des p. fachen Integrales.*

$$\int_0^{\infty\,(p)} \varphi(a_1 x_1^{n_1} + \ldots + a_p x_p^{n_p})\, x_1^{r_1-1} \ldots x_p^{r_p-1}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_p.$$

(*J. de Cr.*, t. XXVII, p. 19.)

Most, *Ueber drei Integrationen innerhalb...* (*Schl. Z.*, t. XIV, p. 422).

Catalan, *Mémoire sur la réduction d'une classe d'intégrales multiples* (*J. de Liou.*, t. IV, p. 323).

§ **24.** La formule

$$\frac{1}{n^a} = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{-nx} x^{a-1}\, dx$$

permet de démontrer quelques théorèmes remarquables sur les séries des puissances réciproques des nombres entiers. On déduit en effet de la considération de cette intégrale les théorèmes suivants.

En mettant à la place de n successivement les nombres 2, 3, 4, ..., on a

$$\sum_2^\infty \frac{1}{n^a} = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty x^{a-1}\, dx \sum_2^\infty e^{-nx} = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty \frac{e^{-2x} x^{a-1}\, dx}{1 - e^{-x}},$$

et en faisant successivement $a = 2, 3, 4 \ldots$ on a

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{a=2}^{a=\infty} \sum_{a=2}^{a=\infty} \frac{1}{n^a} &= \int_0^\infty \frac{e^{-2x}}{1-e^{-x}} \sum_1^\infty \frac{x^a}{a!}\, dx = \int_0^\infty \frac{(e^x - 1)\, e^{-2x}}{1 - e^{-x}}\, dx \\ &= \int_0^\infty e^{-x}\, dx = 1. \end{aligned} \right.$$

La somme des puissances réciproques de tous les nombres entiers est égale à l'unité.

D'une façon plus générale on a

$$\sum_{a=2}^{a=\infty}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{(p+n)^a}=\frac{1}{p}.$$

Si dans la formule (1) on fait n successivement égal à tous les nombres pairs, on a

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{(2n)^a}=\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^{\infty}\frac{e^{-2x}x^{a-1}}{1-e^{-2x}}\,dx=\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^{\infty}\frac{x^{a-1}\,dx}{e^{2x}-1},$$

et par suite

$$(2)\qquad \sum_{a=2}^{a=\infty}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{(2n)^a}=\int_0^{\infty}\frac{(e^x-1)\,dx}{e^{2x}-1}=\int_0^{\infty}\frac{e^{-x}\,dx}{1+e^{-x}}=l2.$$

La somme des puissances réciproques de tous les nombres pairs est égale à $l2$.

Si dans la formule (1) on donne à n toutes les valeurs de la forme $4n+3$, on obtient la relation

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{(4n+3)^a}=\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^{\infty}\frac{e^{-3x}}{1-e^{-4x}}x^{a-1}\,dx=\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^{\infty}\frac{e^x x^{a-1}\,dx}{e^{4x}-1},$$

et par suite

$$\sum_{r=1}^{r=\infty}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{(4n+3)^{2r+1}}=\int_0^{\infty}\frac{e^x}{e^{4x}-1}\,\frac{e^x+e^{-x}-2}{2}\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{dx}{e^{2x}-1}-\int_0^{\infty}\frac{e^x\,dx}{e^{4x}-1};$$

et ces intégrales se déterminent facilement ; on obtient

$$(3)\qquad \sum_{r=1}^{r=\infty}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{(4n+3)^{2r+1}}=\frac{\pi}{8}-\frac{l2}{2}.$$

On a de même

$$(4)\quad \sum_{r=1}^{r=\infty}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{(4n+3)^{2r}}=\int_0^\infty \frac{e^x\,dx}{e^{4x}-1}\,\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-4x}\,dx}{e^{-2x}+1}=\frac{1}{4}\,l2.$$

Enfin, en faisant $n=2,\ 6,\ 10,\ \dots\ 4n+2,\ \dots$ on obtient les relations

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{(4n+2)^a}=\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,e^{-2x}}{1-e^{-4x}}\,dx=\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty \frac{e^{2x}\,x^{a-1}\,dx}{e^{4x}-1},$$

et par suite

$$(5)\quad \sum_{r=1}^{r=\infty}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{(4n+2)^{2r}}=\int_0^\infty \frac{e^{2x}}{e^{4x}-1}\,\frac{e^x-e^{-x}}{2}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+1}=\frac{\pi}{8}.$$

Voir à propos de ces différents théorèmes:
Stern, *J. de Cr.*, t. X, p. 209.
Steiner, *J. de Cr.*, t. XIII, p. 361.
Meyer, *Best. Integ.* et *Gr. Arch.*, t. XLI, p. 220.

Supposons que pour toutes les valeurs de x comprises entre 0 et 1 on ait l'équation

$$(6)\qquad F(x)=A_0+A_1x+A_2x^2+\dots,$$

remplaçons dans les deux membres x par $x\theta^b$ et multiplions-les par le facteur

$$\theta^{a-1}(1-\theta)^{q-1}\,d\theta,$$

l'intégrale prise entre les limites 0 et 1 du premier membre donne

$$\int_0^1 \theta^{a-1}(1-\theta)^{q-1}F(x\theta^b)\,d\theta,$$

et pour le second membre, on obtient, en tenant compte de la formule de réduction des fonctions B aux fonctions Γ,

$$A_0\frac{\Gamma(a)\Gamma(q)}{\Gamma(a+q)}+A_1\frac{\Gamma(a+b)\Gamma(q)}{\Gamma(a+b+q)}x+A_2\frac{\Gamma(a+2b)\Gamma(q)}{\Gamma(a+2b+q)}x^2+\dots$$

Si l'on suppose q entier et positif, on a donc

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^1 \theta^{a-1}(1-\theta)^{q-1}\,\mathrm{F}(x\theta^b)\,d\theta &= \frac{\mathrm{A}_0}{a(a+1)\ldots(a+q-1)} \\ &+ \frac{\mathrm{A}_1 x}{(a+b)(a+b+1)\ldots(a+b+q-1)} \\ &+ \frac{\mathrm{A}_2 x^2}{(a+2b)(a+2b+1)\ldots(a+2b+q-1)} + \ldots \end{aligned}\right.$$

et, dans tous les cas où l'intégrale peut s'exprimer sous forme finie, on arrive ainsi à sommer la série du second membre.

Prenons, par exemple, $\mathrm{F}(x) = (1+x)^\mu$, on a alors

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^1 \theta^{a-1}(1-\theta)^{q-1}(1+x\theta^b)^\mu\,d\theta &= \frac{1}{a(a+1)\ldots(a+q-1)} \\ &+ \frac{\mu}{1}\,\frac{x}{(a+b)(a+b+1)\ldots(a+b+q-1)} \\ &+ \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}\,\frac{x^2}{(a+2b)(a+2b+1)\ldots(a+2b+q-1)} + \ldots \end{aligned}\right.$$

Lorsque a et b sont des nombres entiers, l'intégration peut être effectuée. Si, par exemple, on a

$$a = b = 1, \qquad q = 3, \qquad \mu = -1,$$

il vient

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1+x^2}{2x^2}\,l(1+x) - \frac{1}{2x^2} - \frac{3}{4x} \\ &= \frac{1}{1.2.3} - \frac{x}{2.3.4} + \frac{x^2}{3.4.5} - \frac{x^3}{4.5.6} + \ldots, \end{aligned}\right.$$

x étant compris entre -1 et $+1$.

Si dans la formule (8) on fait $b=1$, $x=1$, μ étant alors supposé positif, l'intégrale est alors une intégrale eulérienne de seconde espèce, et il vient

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\Gamma(a)\Gamma(q+\mu)}{\Gamma(q)\Gamma(a+q+\mu)} &= \frac{1}{a(a+1)\ldots(a+q-1)} \\ &- \frac{\mu}{1}\,\frac{1}{(a+1)(a+2)\ldots(a+q)} \\ &+ \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}\,\frac{1}{(a+2)(a+3)\ldots(a+q+1)} - \ldots \end{aligned}\right.$$

Dans la formule (6) remplaçons dans les deux membres x par $x\theta$ et multiplions de part et d'autre par

$$\theta^{b-1}(1-\theta)^{c-b-1}\,d\theta;$$

en intégrant entre les limites 0 et 1, on obtient

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 \theta^{b-1}(1-\theta)^{c-b-1}\,\mathrm{F}(x\theta)\,d\theta \\ &= \mathrm{A}_0 + \frac{b}{c}\mathrm{A}_1 x + \frac{b(b+1)}{c(c+1)}\mathrm{A}_2 x^2 + \frac{b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2)}\mathrm{A}_3 x^3 + \ldots \end{aligned}\right.$$

Si l'on fait, par exemple, $\mathrm{F}(x) = (1-x)^{-a}$, on trouve

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 \theta^{b-1}(1-\theta)^{c-b-1}(1-\theta x)^{-a}\,d\theta \\ &\qquad = 1 + \frac{ab}{1.c}x + \frac{a(a+1)}{1.2}\frac{b(b+1)}{c(c+1)}x^2 \\ &\qquad + \frac{a(a+1)(a+2)}{1.2.3}\frac{b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2)}x^3 + \ldots, \end{aligned}\right.$$

et il y a bien des cas où l'on peut effectuer l'intégration figurée au premier membre. Si l'on fait en particulier $x=1$, l'intégrale est une intégrale eulérienne de première espèce, et il vient

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-b-a)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} = 1 + \frac{a}{1}\frac{b}{c} + \frac{a(a+1)}{1.2}\frac{b(b+1)}{c(c+1)} \\ &\qquad + \frac{a(a+1)(a+2)}{1.2.3}\frac{b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2)} + \ldots, \end{aligned}\right.$$

où l'on doit nécessairement supposer $c > a+b$.

Inversement, si l'on choisit $\mathrm{F}(x)$ et les constantes A en sorte que la série du second membre ait une somme connue à l'avance, on peut obtenir par les formules précédentes, les valeurs d'un grand nombre d'intégrales définies.

Dans la formule (12) faisons $a = -\frac{1}{2}\mu$, $b = \frac{1}{2}\mu$, $c = \frac{1}{2}$, $x = z^2$ et le second membre est alors le développement de $\cos\mu\arcsin z$.

Si nous posons en outre $\alpha = \arcsin z$ et si nous faisons $\theta = \sin^2 \omega$, il vient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\mu-1}\theta \cos^{-\mu}\theta (1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \theta)^{\frac{\mu}{2}} d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\mu}{2}\right)}{2\sqrt{\pi}} \cos \mu \alpha;$$

μ doit être compris entre 0 et 1 et α entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$.

Les considérations précédentes sont empruntées à Schlömilch (*Compendium*, t. II, p. 277...).

Le second membre de la formule (12) est la série appelée hypergéométrique que Gauss a étudiée dans le Mémoire que nous avons souvent cité (*Werke*, t. III) et qui a donné naissance aux remarquables travaux de Kummer, Jacobi, Goursat, etc. C'est à l'occasion de la formule (13) que Gauss s'est trouvé amené à étudier d'une façon plus particulière la fonction gamma.

D'autres applications à la théorie des suites ont été exposées par Limbourg (*Théorie de la fonction gamma*, p. 120...).

Il convient encore de citer à ce point de vue Schlömilch (*Schl. Z.*, t. III, p. 130), Lejeune-Dirichlet (*J. de Cr.*, t. XVII, p. 57). Voir aussi Berger, sur une sommation de quelques séries. (*Nov. Act. Upsal*, XII_3).

§ **25.** La fonction $\psi(v)$ peut servir à sommer plusieurs suites remarquables.

Considérons la somme

$$(b) \qquad S_n = \frac{a}{b} + \frac{a}{b+c} + \frac{a}{b+2c} + \dots + \frac{a}{b+nc}.$$

On a évidemment

$$S_n = \frac{a}{b} + \frac{a}{c}\left[\frac{1}{\frac{b}{c}+1} + \frac{1}{\frac{b}{c}+2} + \dots + \frac{1}{\frac{b}{c}+n}\right],$$

et par conséquent

$$S_{n+1} - S_n = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c} + n + 1} = \frac{a}{c}\left[\psi\left(\frac{b}{c} + n + 2\right) - \psi\left(\frac{b}{c} + n + 1\right)\right],$$

ou bien

$$S_{n+1} - \frac{a}{c}\psi\left(\frac{b}{c} + n + 2\right) = S_n - \frac{a}{c}\psi\left(\frac{b}{c} + n + 1\right).$$

On voit donc que la différence

$$S_n - \frac{a}{c}\psi\left(\frac{b}{c} + n + 1\right)$$

ne change pas quand on augmente ou quand on diminue n d'une unité. On a donc

$$S_n - \frac{a}{c}\psi\left(\frac{b}{c} + n + 1\right) = S_0 - \frac{a}{c}\psi\left(\frac{b}{c} + 1\right) = \frac{a}{b} - \frac{a}{c}\psi\left(\frac{b}{c} + 1\right),$$

et, par suite,

$$(2) \qquad S_n = \frac{a}{b} + \frac{a}{c}\psi\left(\frac{b}{c} + n + 1\right) - \frac{a}{c}\psi\left(\frac{b}{c} + 1\right).$$

On aura, par exemple,

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2x+1} = 1 + \frac{1}{2}\psi\left(x + \frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2}\psi\left(\frac{3}{2}\right).$$

Soit encore

$$(3) \qquad S_x = \frac{a}{b} - \frac{a}{b+c} + \frac{a}{b+2c} - \ldots - \frac{a}{b+(2x+1)c};$$

on a

$$S_x = \frac{a}{b} + \frac{a}{b+2c} + \ldots + \frac{a}{b+2xc}$$
$$- \left(\frac{a}{b+c} + \frac{a}{b+3c} + \ldots + \frac{a}{b+(2x+1)c}\right),$$

et, en employant la formule précédemment établie,

$$(4)\quad \begin{cases} S_x = \dfrac{a}{b} + \dfrac{a}{2c}\psi\left(\dfrac{b}{2c}+x+1\right) - \dfrac{a}{2c}\psi\left(\dfrac{b}{2c}+1\right) \\ \qquad - \dfrac{a}{b+c} - \dfrac{a}{2c}\psi\left(\dfrac{b}{2c}+x+\dfrac{3}{2}\right) + \dfrac{a}{2c}\psi\left(\dfrac{b}{2c}+\dfrac{3}{2}\right). \end{cases}$$

Faisons croître x indéfiniment, on aura à la limite

$$\psi\left(\frac{b}{2c}+1+x\right) = \psi\left(\frac{b}{2c}+\frac{3}{2}+x\right),$$

et par conséquent

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{b+2c} - \ldots = \dfrac{a}{b(b+c)} \\ \qquad + \dfrac{1}{2}\left[\psi\left(\dfrac{b+3c}{2}\right) - \psi\left(\dfrac{b+2c}{2}\right)\right]. \end{cases}$$

Par exemple, en faisant $b=1$, $c=1$, on a

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[\psi(2) - \psi\left(\frac{3}{2}\right)\right] = l2;$$

si l'on fait $b=1$, $c=2$,

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots = \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\left[\psi\left(\frac{7}{4}\right) - \psi\left(\frac{5}{4}\right)\right] = \frac{\pi}{4},$$

c'est-à-dire

$$\pi = \frac{8}{3} + \psi\left(\frac{7}{4}\right) - \psi\left(\frac{5}{4}\right).$$

Considérons encore l'expression connue

$$\frac{1}{\sin\varphi} = \frac{1}{\varphi} - \frac{1}{\varphi-\pi} - \frac{1}{\varphi+\pi} + \frac{1}{\varphi-2\pi} + \frac{1}{\varphi+2\pi} - \ldots,$$

que nous écrirons

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin\varphi} = \frac{1}{\varphi} - \frac{1}{\varphi-\pi} + \frac{1}{\varphi-2\pi} - \ldots \\ - \left(\frac{1}{\varphi+\pi} - \frac{1}{\varphi+\pi+\pi} + \frac{1}{\varphi+\pi+2\pi} - \ldots\right). \end{aligned}$$

En appliquant deux fois la formule (5), nous trouvons

$$\frac{1}{\sin\varphi} = \frac{\pi}{\varphi(\pi-\varphi)} - \frac{\pi}{(\varphi+\pi)(\varphi+2\pi)}$$
$$+\frac{1}{2\pi}\left[\psi\left(\frac{2\pi-\varphi}{2\pi}\right)+\psi\left(\frac{3\pi+\varphi}{2\pi}\right)-\psi\left(\frac{3\pi-\varphi}{2\pi}\right)-\psi\left(\frac{4\pi+\varphi}{2\pi}\right)\right].$$

Faisons $\varphi = m\pi$ et il vient

$$\frac{\pi}{\sin m\pi} = \frac{1}{m(1-m)} - \frac{1}{(m+1)(m+2)}$$
$$+\frac{1}{2}\left[\psi\left(1+\frac{m}{2}\right)-\psi\left(\frac{2+m}{2}\right)+\psi\left(\frac{3}{2}+\frac{m}{2}\right)-\psi\left(\frac{3}{2}-\frac{m}{2}\right)\right].$$

Si dans cette formule on remplace $\frac{m}{2}$ par x et si l'on tient compte de la formule

$$\psi(1+x) = \frac{1}{x} + \psi(x),$$

il vient enfin

$$\psi(1-x) - \psi(x) + \psi\left(\frac{1}{2}+x\right) - \psi\left(\frac{1}{2}-x\right) = \frac{2\pi}{\sin 2\pi x},$$

formule facile à vérifier au moyen de la relation des compléments.

Au sujet de l'application des fonctions

$$\frac{dl\Gamma(x)}{dx}, \quad \frac{d^2 l\Gamma x}{dx^2}, \ldots,$$

nous renverrons en particulier à une Note de M. Appell (*C. R.*, t. LXXXVI, p. 953).

Le terme général du binôme $(p+q)^\mu$ est

$$\frac{1.2.3\ldots\mu}{1.2\ldots n.1.2\ldots m} p^n q^m$$

ou bien

$$\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(m+1)} p^n q^m, \tag{1}$$

m et n étant deux nombres entiers dont la somme est égale à μ.

Lorsque m, n et μ sont très grands, on ne pourrait songer, même en employant les logarithmes, à calculer un tel terme. Employons les expressions approchées des fonctions Γ.

On a

$$\Gamma(\mu+1) = e^{-\mu}\mu^{\mu}\sqrt{2\mu\pi},$$

$$\Gamma(n+1) = e^{-n}n^{n}\sqrt{2n\pi},$$

$$\Gamma(m+1) = e^{-m}m^{m}\sqrt{2m\pi},$$

et la formule considérée devient

$$(2)\qquad \frac{e^{-\mu}\mu^{\mu}\sqrt{2\mu\pi}}{e^{-n}n^{n}\sqrt{2n\pi}\,e^{-m}m^{m}\sqrt{2m\pi}}\,p^{n}q^{m} = \frac{\mu^{\mu}\sqrt{\mu}}{n^{n}m^{m}\sqrt{2mn}}\,\frac{p^{n}q^{m}}{\sqrt{\pi}}.$$

En posant $n = \alpha\mu$, $m = \beta\mu$, cette expression devient

$$(3)\qquad \frac{p^{n}q^{m}}{\alpha^{n}\beta^{m}\sqrt{2\alpha\beta}}\,\frac{1}{\sqrt{\pi\mu}},\qquad \text{où}\quad \alpha+\beta=1.$$

L'expression du rapport d'un terme au précédent est

$$\frac{q}{p}\,\frac{\mu-n}{n+1}.$$

en sorte que le plus grand terme est déterminé par les inégalités

$$\frac{q}{p}\,\frac{\mu-n+1}{n} > 1,$$

$$\frac{q}{p}\,\frac{\mu-n}{n+1} < 1,$$

c'est-à-dire

$$(\mu+1)q > n(p+q),$$

$$(\mu+1)q < (n+1)(p+q);$$

en sorte que n est la partie entière du quotient $\frac{(\mu+1)q}{p+q}$; de même m est alors la partie entière du quotient $\frac{(\mu+1)p}{p+q}$ et par conséquent lorsque μ est très grand, les exposants de p et de q dans le plus grand terme, sont à peu près dans le rapport même

de p à q. Dans l'expression trouvée précédemment, il suffira donc de faire $\alpha = \frac{p}{p+q}$, $\beta = \frac{q}{p+q}$ pour avoir la valeur approchée du plus grand terme. On trouve alors

$$(4) \qquad \frac{(p+q)^{\mu+1}}{\sqrt{\pi\mu}\sqrt{2pq}}.$$

Si p et q représentent les probabilités de deux événements contraires, la somme $p+q$ est égale à l'unité. Alors les termes du développement de $(p+q)^{\mu}$ représentent les probabilités respectives de diverses combinaisons qui peuvent survenir sur μ épreuves dans la succession des événements considérés.

L'événement le plus probable est celui dont la probabilité est représentée par la formule

$$\frac{(p+q)^{\mu+1}}{\sqrt{\pi\mu}\sqrt{2pq}};$$

c'est celui pour lequel les deux événements arrivent un nombre de fois proportionnel à leurs chances respectives. Il est évident que, même alors, la probabilité, quoique la plus grande de toutes, tend vers zéro avec le nombre μ des épreuves.

Les mêmes formules d'approximation des fonctions gamma permettent d'exprimer simplement la valeur approchée du groupe de termes qui dans le développement suivent et précèdent le plus grand, c'est-à-dire la probabilité pour que le nombre d'arrivées des deux événements contraires ne s'écarte pas au delà d'une limite donnée du nombre correspondant au maximum.

La théorie des probabilités contient un nombre considérable d'applications de la fonction gamma et tout particulièrement des évaluations approchées de cette fonction.

Laplace, dans sa *Théorie des Probabilités,* avait eu souvent l'occasion de s'occuper des fonctions de très grands nombres, mais les procédés particuliers auxquels il a eu recours ne peuvent être considérés comme satisfaisants.

La théorie des probabilités n'est pas la seule branche d'analyse où les fonctions gamma trouvent un emploi continuel. Nous devons aussi citer son application dans la théorie des équations aux différences finies. (Voir, par exemple, le traité de Boole et les mémoires de Russell, Blissard...)

Nous devons aussi indiquer quelques mémoires sur la théorie des nombres où les fonctions gamma jouent un grand rôle.

Lejeune-Dirichlet, *J. de Cr.*, t. XVII, p. 57.

Jacobi, *Berlin. Monatsb.*, 1837.

Genocchi, *Tortolini G.*, III, p. 406.

Kronecker, *J. de Cr.*, 1860; *Berlin. Monatsb.*, 1864 et 1870.

Berger, *Nov. Act. Upsal.*, t. XI et XII.

BIBLIOGRAPHIE

Wallis, 1655.
Arithmetica Infinitorum.

Stirling, 1730.
Methodus differentialis s. Tractatus de summatione et interpolatione serierum.

Euler, 1730. *Comm. Petr.*, t. V, p. 36.
De progressionibus transcendentibus seu quarum termini generales algebraice dari nequeunt.

— 1734-1735. *Comm. Petr.*, t. VII, p. 156.
De progressionibus harmonicis observationes.

— 1739. *Comm. Petr.*, t. XI, p. 3-21.
De productis ex infinitis factoribus ortis.

— 1743. *Misc. Berol.*, t. VII, p. 91.

— Theoremata circa reductionem formularum integraliun ad circuli quadraturam.

— 1755 (2e éd., de 1787).
Institutiones calculi differentialis cum ejus usu in analysi infinitorum ac doctrina serierum.

— *N. Comm. Petr.*, t. VI, p. 115-154.
De expressione integralium per factores.

— 1762-65, *Misc. Taur.*, t. III, p. 156.
Observationes circa integralia talium formularum $\int x^{p-1}dx(1-x)^{\frac{q-1}{n}}$ posito post integrationem $x = 1$.

Euler, 1768-70, 3 vol. (2e éd., 1792-94, 4 vol.)

Institutiones Calculi integralis.

— 1769, *N. Comm.*, t. XIV, p. 129.

De summis serierum numeros Bernoullianos involventium.

— 1771, *N. Comm.*, t. XVI, p. 91-139 et *Calc. Integ.*, t. IV, p. 78-121.

Evolutio formulæ integralis $\int x^{f-1}dx(lx)^{\frac{m}{n}}$ integratione a valore $x=0$ ad $x=1$ extensa.

— 1774, *N. Comm.*, t. XIX, p. 30; *Calc. Integ.*, t. IV, p. 122.

De valore formulæ integralis $\int^{1} \frac{z^{\lambda-\omega} \pm z^{\lambda+\omega}}{z \pm z^{2\lambda}} \frac{dz}{z} (lz)^{\mu}$ casu quo post integrationem ponitur $z=1$.

— 1774, *N. Comm.*, t. XIX, p. 66.

Nova methodus quantitates integrales determinandi.

— 1775, *N. Comm.*, t. XX, p. 59.

Speculationes analyticæ.

— 1776, *N. Acta*, t. V, p. 86-118 et 118-129.

Comparatio formulæ integralis $\int^{1} \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$ a termino $x=0$ usque ad $x=1$ extensæ.

— 1776, *N. Acta*, t. V, p. 3.

Evolutio formulæ integralis $\int dx\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{lx}\right)$ a termino $x=0$ usque ad $x=1$ extensæ.

— 1776, *N. Acta*, t. VIII, p. 15.

De vero valore hujus formulæ integralis $\int^{1} dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{n}$ a termino $x=0$ usque ad $x=1$ extensæ.

— 1781, *Cal. Integr.*, t. IV, p. 337-345.

De valoribus integralium a termino variabili $x=0$ usque ad $x=\infty$ extensorum.

— ? *Opera posthuma*, (1862), t. I, p. 430-438; *Bull. Darboux*, t. IV_2, 1e P., p. 209-256.

Considérations sur quelques formules intégrales dont les

valeurs peuvent être exprimées en certains cas par la quadrature du cercle.

Mascheroni, 1790.

Adnotationes ad calculum integralem Euleri.

Kramp, 1799.

Analyse des réflexions astronomiques et terrestres.

Legendre, 1819, *Mém. Inst.*, t. X, p. 416-509 (*Exerc.*, t. I, 2e P.).

Recherches sur diverses sortes d'intégrales définies.

Bessel, 1812, *Königsb. Arch.*, t. I, p. 241; *Werke*, t. II, p. 350.

Ueber die Theorie der Zahlenfacultäten.

Bidone, 1811, *Mém. Turin*, t. XX, p. 231-245.

Mémoires sur diverses intégrales définies.

Gauss, 1812, *Comm. Gött.*, t. II, p. 1-46; *Werke*, t. III.

Disquisitiones generales circa seriem infinitam

$$1+\frac{\alpha}{1}\cdot\frac{\beta}{\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2}\cdot\frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}x^2+\dots$$

Poisson, 1813, *J. Ec. Pol.*, 16e et 17e cah.

Sur les intégrales définies.

Legendre, 1816.

Exercices de Calcul....

Cisa de Grésy, 1821, *Mém. Turin*, t. XXVI, p. 209-396.

Mémoire sur les intégrales définies.

Poisson, 1823, *J. Ec. Pol.*, cah. XIX, p. 404-509.

Suite du Mémoire sur les intégrales définies et sur la sommation des séries.

Sturm, 1824, *Ann. Math. Ger.*, t. XIV, p. 17-23.

Deux théorèmes.

Ampère, 1825, *Ann. Math. Gerg.*, t. XX, p. 369-381.

Analogie entre les facultés numériques et les puissances.

Abel, 1823, *Œuvres*, 2e éd., t. I, p. 11-17.

Solution de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies.

— 1826, *Œuvres*, 2e éd., t. I, p. 97-101.

Résolution d'un problème de mécanique.

Abel, 1827, *Œuvres*, 2e éd., t. I, p. 251-262.

Sur quelques intégrales définies.

— ? *Œuvres*, 2e éd., t. II, p. 1-6.

Les fonctions transcendantes $\Sigma \frac{1}{a^2}, \Sigma \frac{1}{a^3}, \ldots, \Sigma \frac{1}{a^n}$.

— ? *Œuvres*, 2e éd., t. VII, p. 7-13.

Sur l'intégrale définie $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} dx$.

Crelle, 1831, *J. de Cr.*, t. VII, p. 253-305; 314-380.

Mémoire sur la théorie des puissances, des fonctions angulaires et des facultés analytiques.

Jacobi, 1834, *J. de Cr.*, t. XI, p. 307.

Demonstratio formulæ

$$\int_0^1 w^{a-1}(1-w)^{b-1}\,dw = \frac{\int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}\,dx \int_0^\infty e^{-x}x^{b-1}\,dx}{\int_0^\infty e^{-x}x^{a+b-1}\,dx} = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Müller, 1834, *J. de Cr.*, t. XI, p. 361-372.

Beitrag zur Theorie der Facultäten.

Lejeune-Dirichlet, 1836, *J. de Cr.*, t. XV, p. 258-263.

Sur les intégrales Eulériennes.

Plana, 1837, *J. de Cr.*, t. XVII, p. 1-34, 163-202.

Recherches analytiques sur les expressions du rapport de la circonférence au diamètre trouvées par Wallis et Brounker et sur la théorie de l'intégrale Eulérienne $\int_0^1 x^{p-1}(1-x^n)^q dx$.

Pagès, 1837, *J. de Liou.*, t. II, p. 437-438.

Note sur une propriété des sections coniques.

Catalan, 1838, *J. de Liou.*, t. III, p. 508-516.

Note sur une équation aux différences finies.

Lejeune-Dirichlet, 1839, *C. R.*, t. VIII, p. 156; *J. de Liou.*, t. IV, p. 164-168.

Sur une nouvelle méthode pour la détermination des intégrales multiples.

Binet, 1839, *C. R.*, t. IX, p. 39-45; *J. Ec. Pol.*, cah. XXVII, p. 123-343.

Mémoire sur les intégrales définies Eulériennes et sur leur application à la théorie des suites, ainsi qu'à l'évaluation des fonctions de grands nombres.

Liouville, 1839, *C. R.*, t. IX, p. 105-108; *J. de Liou.*, t. IV, p. 317-322.

Note sur l'évaluation approchée du produit $1.2.3...x$.

Binet, 1839, *C. R.*, t. IX, p. 156-159.

Note sur l'expression du logarithme de l'intégrale Eulérienne $\Gamma(p)$.

Brassine, 1839, *Mém. Toulouse*, t. V_2, p. 139-142.

Fragments d'un Mémoire sur l'intégration des équations différentielles.

Catalan, 1839, *J. de Liou.*, t. IV, p. 95-99.

Addition à la Note du t. III, p. 508.

— 1839, *J. de Liou.*, p. 323-344.

Mémoire sur la réduction d'une classe d'intégrales multiples.

Lejeune-Dirichlet, 1839, *J. de Liou.*, p. 393-422.

Démonstration de cette proposition. — Toute progression arithmétique, dont le premier terme et la raison sont des entiers sans diviseur commun, contient une infinité de nombres premiers.

Greatheed, 1839, *Camb. Math. J.*, t. I, p. 11-21, 109-117.

On general differentiation.

? 1839, *Camb. Math. J.*, t. I, p. 94-96.

On differentiation.

Stern, 1840, *J. de Cr.*, t. XXI, p. 377-379.

Remarques sur les intégrales Eulériennes.

Catalan, 1840, *J. de Liou.*, t. V, p. 110-114.

Note sur l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\cos ax}{(1+x^2)^n} dx$.

— 1841, *J. de Liou.*, t. VI, p. 81-84.

Théorème sur la réduction d'une intégrale multiple.

Grunert, 1842, *Gr. Arc.*, t. II, p. 266-323.

Ueber die neuesten Erfindungen in der Theorie der bestimmten Integrale.

Serret, 1842, *J. de Liou.*, t. VII, p. 114-119.

Note sur les intégrales Eulériennes de seconde espèce.

Binet, 1843, *C. R.*, t. XVI, p. 377-381.

Note sur la détermination de l'intégrale Eulérienne binôme $\int_0^1 x^{p-1}dx(1-x)^{q-1}$ dans le cas où l'un des arguments p et q est un nombre rationnel.

Cauchy, 1843, *C. R.*, t. XVI, p. 422-433.

Mémoire sur la théorie des intégrales définies singulières appliquées généralement à la détermination des intégrales définies et en particulier à l'évolution des intégrales Eulériennes.

— 1843, *C. R.*, t. XVII, p. 370-377.

Recherches sur les intégrales Eulériennes.

Boncompagni, 1843, *J. de Cr.*, t. XXV, p. 74-96.

Recherches sur les intégrales définies.

Raabe, 1843, *J. de Cr.*, t. XXV, p. 147-159.

Angenäherte Bestimmung der Factorenfolge $1.2.3\ldots n = \Gamma(1+n) = \int e^{-x}x^n dx$ wenn n eine sehr grosse Zahl ist.

Serret, 1843, *J. de Liou.*, t. VIII, p. 1-22.

Note sur quelques formules de calcul intégral.

Tchebychef, 1843, *J. de Liou.*, t. VIII, p. 235-238.

Note sur une classe d'intégrales définies multiples.

Serret, 1843, *J. de Liou.*, t. VIII, p. 489-494.

Sur quelques formules relatives à la théorie des intégrales Eulériennes.

Cauchy, 1844, *C. R.*, t. XIX, p. 67-73.

Note sur les intégrales Eulériennes.

— 1844, *Exerc. d'An. et de Ph. Math.*, t. II, p. 358-410.

Mémoire sur la théorie des intégrales définies singulières appliquées généralement à la détermination des inté-

grales définies et en particulier à l'évaluation des intégrales Eulériennes.

Binet, 1844, *C. R.*, t. XIX, p. 375.

Recherches sur une question de l'analyse des probabilités...

Féaux, 1844, *Monasterii typis Coppenrathianis.*

De functione quæ littera Γ obsignatur sive de integrali Euleriano secundæ speciei :

Raabe, 1844, *J. de Cr.*, t. XXVIII, p. 10-18

Angenäherte Bestimung der Factorenfolge

$$1.2.3\ldots n = \Gamma(1+n) = \int x^n e^{-x}\, dx,$$

wenn n eine sehr grosse Zahl ist. (Fortsetzung.)

— 1844, *J. de Cr.*, t. XXVIII, p. 19-27.

Reduction des p. fachen Integral-Ausdrucks

$$\int_0^x\int_0^x\int_0^x \ldots \varphi(a_1 x_1^{n_1} + \ldots + a_p x_p^{n_p}) x_1^{r_1 - 1} \ldots x_p^{r_p - 1}\, dx_1 \ldots dx_p$$

auf ein einfaches ...

Schlömilch, 1844, *Gr. Arc.*, t. IV, p. 167-174.

Einiges über die Euler'sche Integrale der zweiten Art.

Mainardi, 1845, *Mem. Ist. Veneto*, t. II, p. 401-424.

Sulla integrazione della formula $\dfrac{F}{E\sqrt[3]{\varphi}}$ essendo F, E, φ funzioni intere di una medesima variabile.

Gudermann, 1845, *J. de Cr.*, t. XXIX, p. 209-212.

Additamentum ad functionis $\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-x} x^{a-1}\, dx$ theoriam.

Cayley, 1845, *J. de Liou.*, t. X, p. 158-168 et 242-244.

Sur quelques intégrales multiples.

Weddle, 1845, *Mathem.*, t. I, p. 143-146.

On the fonction $\Gamma(x+1)$.

Schlömilch, 1845, *Gr. Arc.* t. IV, p. 213-222.

Ein Paar allgemeine Eigenschaften der Euler'schen Integrale zweiten Art.

Schlömilch, 1846, *J. de Cr.*, t. XXXIII, p. 268-280.

Note sur la variation des constantes arbitraires d'une intégrale définie.

— 1846, *Gr. Arc.*, t. VII, p. 346-353.

Ueber Legendre's Theorie von den Euler'schen Integralen zweiter Art.

Svanberg, 1846, *J. de Liou.*, t. XI, p. 197-200.

Sur les intégrales définies

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\beta x} x^{m-1}\, dx}{1+x^2}, \quad \int_0^{\infty} \frac{\cos \beta x . x^{m-1}\, dx}{1+x^2}, \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin \beta x . x^{m-1}\, dx}{1+x^2}.$$

Liouville, 1846, *J. de Liou.*, t. XI, p. 464-465.

Sur l'intégrale $\int_0^{\infty} e^{-x} x^n\, dx$.

Schaar, 1846, *Mém. Cour. Brux.*, t. XXII, p. 1-25.

Mémoire sur les intégrales Eulériennes et sur la convergence d'une certaine classe de séries.

Kummer, 1847, *J. de Cr.*, t. XXXV, p. 1-4.

Beitrag zur Theorie der Function $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-v} v^{x-1}\, dv$.

Oettinger, 1846 à 1852, *J. de Cr.*, t. XXXIII, XXXV, XXXVIII et XLIV (huit mémoires).

Untersuchungen über die analytischen Facultäten.

Arndt, 1847, *Gr. Arc.*, t. X, p. 250-253.

Ueber einen von Gauss gefundenen Ausdruck der Gamma-Function.

Cayley, 1847, *J. de Liou.*, t. XII, p. 231-240.

Sur quelques formules du calcul intégral.

Schlömilch, 1848, Leipzig, Engelmann.

Analytische Studien.

Ohm, 1848, *J. de Cr.*, t. XXXVI, p. 277-295.

Ueber das Verhalten der Gamma-Function zu den Producten æquidifferenter Factoren.

Newmann, 1848, *Camb. and Dub. Math. J.*, t. III, p. 57-60

On $\Gamma(a)$ especially when a is negative.

Arentz, 1850, Indbydelsesskrift ... Christiania.
Om Functionen Γm, isœr med Hensyn til dens numeriske Evaluation.

Ohm, 1850, *J. de Cr.*, t. XXXIX, p. 23-41.
Ueber die Behandlung der Lehre der reellen Factoriellen und Facultäten, nach einer Methode der Einschliessung in Grenzen

Hoppe, 1850, *J. de Cr.*, t. XL, p. 152-159.
Remarque sur la réduction de la fonction Gamma, et sur la définition de cette fonction et des facultés analytiques par leurs propriétés.

Meyer, 1851, *Mém. Liège*, t. VII, p. 1-510.
Exposé élémentaire de la théorie des intégrales définies.

Raabe, 1852, *J. de Cr.*, t. XLIII, p. 283-292.
Ueber die Factorielle $\left(\frac{m}{k}\right)$ ...

Schlömilch, 1852, *J. de Cr.*, t. XLIV, p. 344-355.
Sur les facultés analytiques.

Genocchi, 1852, *Annali Tortol*, t. III, p. 406-436.
Sulla formula sommatoria di Eulero, e sulla teoria de residui quadratici.

Dedekind, 1852, Inaugural Dissertation.
Ueber die Elemente der Theorie der Euler'schen Integrale.

Liouville, 1852, *C. R.*, t. XXXV, p. 317-322; *J. de Liou.*, t. XVI, p. 448-453.
Note sur les fonctions Gamma de Legendre.

Genocchi, 1853, *Bull. Brux.*, t. XX, p. 392-397.
Démonstration élémentaire d'une formule logarithmique de M. Binet.

Dedekind, 1853, *J. de Cr.*, t. XLV, p. 370-374.
Ueber ein Euler'sches Integral.

Dienger, 1853, *J. de Cr.*, t. XLVI, p. 119-144.
Summen von Reihen ausgedrückt durch bestimmte Integrale. Anwendungen dieser Sätze.

Genocchi, 1854, *Annal. Tortol.*, t. V, p. 150-160.

Demonstration élémentaire d'une formule logarithmique de M. Binet.

Genocchi, 1854, *Bull. Brux.*, t. XXI, p. 64-95.

Sur quelques particularités de formules d'analyse mathématique.

Cauchy, 1854, *C. R.*, t. XXXIX, p. 129-135.

Sur une formule de M. Anger et d'autres formules analogues.

Raabe, 1854, *J. de Cr.*, t. XLVIII, p. 130-136.

Werthung der Factorielle ...

Liouville, 1855, *J. de Liou.*, t. XX, p. 133-134.

Valeur d'une intégrale définie qui se rattache aux intégrales trinômes.

— 1855, *J. de Liou.*, t. XX, p. 157-160.

Sur un théorème relatif à l'intégrale Eulérienne de seconde espèce.

— 1855, *J. de Liou.*, t. XX, p. 161-163.

Sur l'équation $\Gamma(t)\,\Gamma\left(t+\frac{1}{2}\right)=2^{1-2t}\sqrt{\pi}\,\Gamma(2t)$.

— 1856, *C. R.*, t. XLII, p. 500-508; *J. de Liou.*, t. I_2, p. 82-88.

Détermination des valeurs d'une classe remarquable d'intégrales définies et démonstration nouvelle d'une célèbre formule de Gauss concernant les fonctions Gamma de Legendre.

— 1856, *J. de Liou.*, t. I_2, p. 280-294.

Mémoire sur la réduction de classes très étendues d'intégrales multiples.

— 1856, *J. de Liou.*, t. I_2, p. 445.

Démonstration nouvelle d'une formule de M. Thomson.

Björling, 1856, *Overs. Stock. Förhandl.*, p. 181-182.

Bevis för formeln $\int_0^1 l\Gamma(x+p)\,dx=\frac{1}{2}\,l2\pi+plp-p$.

Schlömilch, 1856, *Schl. Z.*, t. I, p. 118-119.

Zur Theorie der Gammafunction.

Jacobi, 1856, *N. A. M.*, t. XV, p. 337-352.

Sur la division du cercle et son application à la théorie des nombres.

Schlömilch, Cayley, Liouville, 1857, *J. de Liou.*, t II$_2$, p. 47-55.

Sur l'intégrale $\int_0^1 \frac{t^{\mu+\frac{1}{2}}(1-t)^{\mu-\frac{1}{2}}}{(a+bt-ct^2)^{\mu-1}}$.

Schlömilch, 1857, *J. de Liou.*, t. II$_2$, p. 206-218.

Réduction d'une intégrale multiple.

Kinkelin, 1857, *Mitt. Ger. Bern.*, p. 1-11.

Die Fundamentalgleichungen der Function $\Gamma(x)$.

Enneper, 1857, *Quart. J.*, t. I, p. 276-279.

On the definite integral $\int_0^\infty \frac{\sin^q u}{u^m} du$.

— 1857, *Quart. J.*, t. I, p. 393-405.

On the function $\Gamma(x)$ with imaginary and complex variable.

Schmit, 1858, *Mém. Liège,* t. XIII, p. 289-327.

Intégrales définies....

Catalan, 1858, *C. R.*, t. XLVII, p. 545-549.

Sur une application de la formule du binôme aux intégrales Eulériennes.

Schlömilch, 1858, *Schl. Z.*, t. III, p. 130-132.

Ueber eine Eigenschaft gewisser Reihen.

Clausen, 1858, *Gr. Arc.*, t. XXX, p. 166-170.

Ueber die Ableitung des Differentials von $l\Gamma(x)$.

Zehfuss, 1858, *Gr. Arc.*, t. XXX, p. 441.

Einfache Herleitung des Gauss'schen Ausdrucks für $\Gamma(x)$.

Schlaefli, 1858-59, *Quart. J.*, t. II, p. 269-301; t. III, p. 54-68, 97-108.

On the multiple integral $\int^n dx\,dy \ldots. dz \ldots.$

Limbourg, 1859, Gand.

Théorie de la fonction gamma.

Bierens de Haan, 1858 (2e éd. 1867).

Tables d'Intégrales définies.

Lipschitz, 1859, *J. de Cr.*, t. LVI, p. 11-26.
Ueber die Darstellung gewisser Functionen durch die Euler'sche Summenformel.

Liouville, 1859, *J. de Liou.*, t. V_2, p. 155-160.
Sur une intégrale définie multiple.

Schlömilch, 1859, *Schl. Z.*, t. IV, p. 431-433.
Entwickelung einer neuen Reihe für die Gammafunction.

Zehfuss, 1859, *N. A. M.*, t. XVIII.
Déduction simple de l'expression $\Gamma(x)$ de Gauss.

Schlömilch, 1859, *Schl. Z.*, t. IV, p. 390.
Ueber Facultäten Reihen.

Bonnet, 1860, *C. R.*, t. I, p. 862.
Sur la formule de Stirling.

Schlömilch, 1860, *Schl. Z.*, t. V, p. 228.

$$1.2.3\ldots n > (\sqrt{n})^n,$$

Schläfli, 1858-1860, *Quart. J.*, t. II, p. 269; t. III, p. 54 et 98.
On the multiple integral $\int^n dx\,dy\ldots dz$ whose limits are $p_1 = a_1x + b_1y + \ldots + h_1z > 0$, $p_2 > 0, \ldots, p_n > 0$, and $x^2 + y^2 + \ldots + z^2 < 1$.

Bauer, 1860, *J. de Cr.*, t. LVII.
Von den Gammafunctionen und einer besonderen Art unendlicher Producte.

Dietrich, 1861, *J. de Cr.*, t. LIX, p. 163.
Ueber eine Reihentransformation Stirlings.

Russell, 1861, *Quart. J.*, t. IV, p. 163-165; 316-318.
Note on the transformation of certain multiple integrals.

Bierens de Haan, 1862.
Exposé de la théorie, des propriétés, des formules de transformation et des méthodes d'évaluation des intégrales définies.

Enneper, 1862, *Schl. Z.*, t. VII, p. 187.
Bemerkung über die Gammafunction.

Hoppe, 1863, *Grun. Arc.*, t. XLI, p. 65.
Beweis für einen Satz von den Euler'schen Integralen.

Hankel, 1863, *Leipzig.* et *Schl. Z.*, t. IX, p. 1 ...
Die Euler'schen Integrale bei unbeschränkter Variabilität des Arguments.

Heine, 1863, *J. de Cr.*, t. LXI, p. 356-366.
Ueber einige bestimmte Integrale.

Oettinger, 1864, *J. de Cr.*, t. LXIII, p. 252-254.
Ueber ein bestimmtes Integral.

Schlömilch, 1864, *Schl. Z.*, t. IX, p. 356.
Ueber ein Paar durch Gammafunctionen ausdrückbaren Integrale.

Walton, 1866-67, *Quart. J.*, t. VII, p. 212, t. VIII, p. 52-65, 136-144.
On interpolation with reference to development and differentiation.

Stern, 1867, *J. de Cr.*, t. LXVII, p. 114-129.
Beweis eines Satzes von Legendre.

Meyer, C. F., 1867, *Arch. Gr.*, t. XLI, p. 220-231.
Summation reciproker Potenzreihen mittelst der Formel

$$\frac{1}{s^a} = \frac{1}{\Pi(a-1)}\int_0^\infty e^{-sx}\, x^{a-1}\, dx.$$

Shanks, 1867, *Proceed. Lond.*, t. XV, p. 429.
On the Calculation of the numerical value of Euler's Constant, et Supplementary Paper.

Schläfli, 1867, *Quart. J.*, t. VIII, p. 370-373.
On the multiple integral $\int^n dx dy \ldots dz$ whose limits are $p_1 = a_1 x + b_1 y + \ldots + h_1 z > 0$, $p_2 > 0$, ..., $p_n > 0$, and $x^2 + y^2 + \ldots + z^2 > 1$.

Matthiessen, 1867, *Schl. Z.*, t. XII, p. 302-321.
Zur Theorie der bestimmten Integrale und der Gammafunctionem.

Blissard, 1868, *Quart. J.*, t. IX, p. 280-296.
On certain properties of the Gammafunction.

Shanks, 1868, *Proceed. Lond.*, t. XVI, p. 154 et 299-300.
Second and third Supplementary Paper on the calculation of the numerical value of Euler's constant.

Meyer, 1871, Leipzig.
Vorlesungen über die Theorie der bestimmten Integrale zwischen reellen Greuzen.

Glaisher, 1872, *Messenger*, t. I_1, p. 25-30.
On the history of Euler's constant.

Shanks, 1871, *Proceed. London.*, t. XIX, p. 29-34.
Paper on the numerical value of Eulers's constant and on the summation of the harmonic series employed in obtaining such value.

Realis, 1871, *Battaglino G.*, t. IX, p, 345-354.
Esercizio elementare sugl' integrali euleriani della prima specie.

Blissard, 1871, *Ed. Times*, t. XIV, p. 64.
Questions 3074, 3105.

Glaisher, 1872, *Report Brit. Ass.; Messenger*, t. I_1, p. 106-111.
On the integrals $\int_0^\infty \sin(x^n)dx$ and $\int_0^\infty \cos(x^n)dx$.

— 1872, *Rep. Brit., Ass.*
On the evaluation in series of certain definite integrals.

— 1872, *Rep. Brit. Ass.*
On the funtion that stands in the same relation to Bernoulli's numbers that the Gammafunction does to factorials.

— 1872, *Ed. Times*, t. XVI, p. 23.
Question 3429.

Catalan, 1873, *C. R.*, t. LXXVII, p. 198-201.
Sur la constante d'Euler et la fonction de Binet.

Enneper, 1873, *Schl. Z.*, t. XVIII, p. 407-415.
Ueber einige bestimmte Integrale.

Bierens de Haan, 1873, *Arch. Néerl.*, t. VIII, p. 135-147.
Sur quelques intégrales définies à facteurs e^{qx^p}, $\cos(qx^p)$, $\sin(qx^p)$.

Bierens de Haan, 1873, *Arch. Néerl.*, t. VIII, p. 148-152.

De l'intégrale $\int_a^b l\Gamma(x)\,dx$.

— 1873. *Verslagen en Meded.*, t. VII_2, p. 12-31.

Bydragen tot de theorie der bepaaldte integralen.

De Tilly, 1873, *Bull. Belg.*, t. $XXXV_2$, p. 30-40.

Note sur la formule qui donne, en série convergente, la somme des logarithmes hyperboliques des x-1 premiers nombres entiers.

Gilbert, 1873, *Bull. Bellg*, t. $XXXV_2$, p. 5-11.

Rapport sur ce Mémoire.

Genocchi, 1873, *Bull. Belg.*, t. $XXXVI_2$, p. 546-565.

Sur quelques développements de la fonction $l\Gamma(x)$.

De Tilly, 1873, *Bull. Belg.*, t. $XXXVI_2$, p. 454-468.

Rapport sur ce Mémoire.

Gilbert, 1873, *Bull. Belg.*, t. $XXXVI_2$, p. 541-545.

Observations sur deux Notes de M. A. Genocchi relatives au développement de la fonction $l\Gamma(x)$.

— *Mém. de Belg.*, t. XLI.

Recherches sur le développement de la fonction Γ et sur certaines intégrales définies qui en dépendent.

Catalan, 1873, *Bull. Belg.*, t. $XXXVI_2$, p. 4-16.

Rapport sur ce Mémoire.

Genocchi, 1874, *Bull. Belg.*, t. $XXXVII_2$, p. 351-352.

Réclamation de priorité au sujet de la série de Binet.

De Tilly, 1874, *Bull. Belg.*, t. $XXXVIII_2$, p. 67-70.

Sur la généralisation de la formule de Binet.

Bellavitis, 1874, *Mem. Ist. Veneto.*, t. XVIII, p. 125-162.

Tavole numeriche del logarithmo integrale ovv. dell' esponenziale integrale e di altri integrali Euleriani.

Catalan, 1874. *Liouville*, I_3, p. 209-241; *Bull. Belg.*, t. XXXIV, p. 424-428.

Sur la constante d'Euler et la formule de Binet.

Féaux, 1875, *Prog. Augsburg.*

Recherches d'Analyse.

Hočevar, 1876, *Schl. Z.*, t. XXI, p. 449-450.
Ueber die unvollständige Gammafunction.

Liebrecht, 1876, *Gr. Arc.*, t. LIX, p. 218-224.
Ueber einige bestimmte Integrale.

Catalan, 1877, *Mém. de Belgique*, t. XLII.
Sur quelques formules relatives aux intégrales Eulériennes.

Hall, Eddy, Kummel, 1877, *Analyst*, t. IV, p. 48, 94, 120-121.
On an integral.

Glaisher, 1877, *Ed. Times*, t. XXVIII, p. 19.
Question 5249.

Spitzer, 1877, *Gr. Arc.*, t. LXI, p. 329-332.
Bestimmung der Flächeninhalten.

Glaisher, 1877, *Quart. J.*, t. XV, p. 57-64.
Proof of Stirling's theorem...

Kummel, 1877, *Analyst*, t. IV, p. 156-157, p. 182-183.
On the Gammafonction.

Appell, 1878, *C. R.*, t. LXXXVI, p. 953-956.
Sur quelques applications de la fonction $\Gamma(x)$ et d'une autre fonction transcendante.

— 1878, *C. R.*, t. LXXXVII, p. 874-876.
Évaluation d'une intégrale définie.

Hermite, 1879, *Atti di Torino*, t. XIV, p. 91-116.
Sur l'intégrale $\int_0^1 \frac{z^{a-1} - z^{-a}}{1-z}\,dz$.

Hoesch, 1879, *Dissert.*, Göttingen,
Untersuchungen über die Π Function von Gauss und verwandte Functionen.

Eneström, 1879, *Ofversigt Vetens. Ak...*
Om uppläckten af den Euler'ska summations formeln.

Schlömilch, 1880, *Schl. Z.*, t. XXV, p. 351-352.
Ueber den Quotienten zweier Gammafunctionen.

— 1880, *Schl. Z.*, t. XXV, p. 103-106.
Einige Bemerkungen über den reciproken Werth der Gammafunction.

— 1880, *Schl. Z.*, t. XXV, p. 337-342.
Ueber eine Verwandte der Gammafunction.

De Longchamps, 1880, *Ann. Ec. Norm.*, t. IX_2, p. 419-427.
Sur les intégrales culériennes de seconde espèce.

Bourguet, 1881, *Ann. Ec. Norm.*, t. X_2, p. 175-233.
Développement en séries des intégrales Eulériennes.

— 1881, *Bull. Darb.*, t. V_2, p. 43-51.
Sur les intégrales eulériennes.

Ricart, 1881, *Cron. cient.*, t. IV, p. 209-211.
Relacion entre las dos integrales Eulerianas.

Bourguet, 1881, *Atti di Torino*, t. XVI, p. 755-772.
Sur la détermination des maxima et minima de la fonction $\Gamma(x)$.

Sonine, 1881, *Bull. S. M.*, t. IX, p. 162-166.
Note sur une formule de Gauss.

Gylden, 1881, *C. R.*, t. XCII, p. 897-901, 941-943.
Sur l'intégrale eulérienne de seconde espèce.

Stabenow, Selby, 1881, *Ed. Times*, t. XXXIV, p. 75-76.
Question 6378.

Berger, 1881, *Upsal.* N. *Acta*, t. XI, XII.
Sur quelques applications de la fonction Gamma.

Glaisher, 1881, *Lond. M. S. Proc.*, t. XIII, p. 92-99.
On some definite integrals expressible in terms of the first complete elliptic integral and of gamma functions.

Krantz, 1881, *Nieuw. Arch.*, t. VII, p. 207-212.
Bepaling van de waarde der uitdrukking.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{\cos\varphi}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi}}.$$

Hermite, 1881, *J. de Cr.*, t. XC, p. 332-338.
Sur l'intégrale Eulérienne de seconde espèce.

Appell, 1881, *C. R.*, t. LXXXVI, p. 953; t. LXXXIX, p. 841 et 1031; *Math. Ann.*, t. XIX, p. 84-102.
Sur une classe de fonctions analogues aux fonctions Eulériennes.

Bourguet, 1882, *Acta Math.*, t. I, p. 295.
Note sur les intégrales Eulériennes.

Bourguet, 1882, *Acta Math.*, t. I, p. 363.

Sur quelques intégrales définies.

— 1883, *Acta Math.*, t. II, p. 261.

Sur les intégrales Eulériennes et quelques autres fonctions uniformes.

— 1883, *Acta Math.*, t. II, p. 296.

Sur la fonction Eulérienne.

Mellin, 1883, *Acta Math.*, t. II, p. 231.

Ueber die transcendente Function $Q(x) = \Gamma(x) - P(x)$,

— 1883, *Ofversigt Vetensk. Ak.*

Om Gamma funktionen.

Mellin, 1883, *Acta Math.*, t. III, p. 102.

Eine Verallgemeinerung der Gleichung

$$\Gamma(1+x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi x}{\sin \pi x}.$$

— 1883, *Acta Math.*, t. III, p. 322.

Ueber gewisse durch die Gammafunction ausdrückbare unendliche Producte.

NOTE SUR LE CALCUL FONCTIONNEL

L'existence de la relation fonctionnelle à laquelle satisfait la fonction Γ, conduisit Euler à s'occuper d'une question plus générale qui fit le sujet d'un de ses mémoires : *Methodus inveniendi formulas integrales quæ certis casibus datam inter se teneant relationem.* (*Opuscula Anal.*, t. II, p. 178-216; *Calc. Integ.*, t. IV, p. 378-415).

Mais ce n'est là que le germe de ce que Babbage a appelé plus tard le *calcul fonctionnel.*

La détermination de fonctions au moyen de conditions données prit réellement naissance dans les travaux relatifs à l'intégration des équations aux dérivées partielles, et l'on voit bientôt les inventeurs de ce calcul aux prises avec le problème auquel il avait donné le jour.

D'Alembert, puis Euler et Lagrange s'occupèrent de cette question, mais c'est à Monge que l'on doit les vues les plus générales sur ce sujet. Ses recherches portèrent sur la détermination de deux fonctions par des conditions données; elles se trouvent dans les *Mélanges* de Turin (T. V) et dans deux mémoires contenus dans le septième volume des *Mém. Sav. ét.*, 1773.

Laplace, dans le même volume, s'occupa de la réduction de l'équation fonctionnelle $F(x, \varphi x, \varphi ax) = 0$ à une équation aux différences finies où la différence est constante. C'est encore à ce point de vue que se plaçait Herschel dans ses recherches sur la même question. Citons aussi Arbogast. Les résultats les plus importants de cette branche particulière de l'Analyse sont dus à Babbage.

On pourrait peut-être avant lui citer Fuss (*Mem. Aca. Pet.* t. V, p. 225.) Mais c'est à Babbage que revient le mérite d'avoir, dans deux mémoires excessivement remarquables, mis en relief l'importance des questions qui se rattachent à cette théorie et d'avoir trouvé des méthodes de solutions curieuses à plus d'un titre (*Phil. Transact,* 1815 et 1816). Le nombre des questions soulevées par Babbage est considérable; ses réponses peuvent aujourd'hui, dans l'état actuel de l'Analyse, être considérées comme insuffisantes; il suppose en effet, en général, que l'on connaît une ou plusieurs solutions des équations fonctionnelles qu'il considère et se propose d'en déduire d'autres; nous devons cependant dire que les équations fonctionnelles dont Babbage s'est occupé comprennent un bon nombre de fonctions nouvelles sur lesquelles se sont portés depuis 1816 les efforts des géomètres, et, pour ne citer que quelques exemples, les fonctions doublement périodiques et les fonctions fuchsiennes; nous pouvons également rappeler les fonctions périodiques générales que M. Appell a retrouvées d'une façon si élégante et que M. Rausenberger a étudiées dans les *Math. Annalen.*

En 1817 (*Phil. Trans.*), Babbage publiait un nouveau Mémoire sur l'analogie qui existe entre le calcul des fonctions et d'autres branches de l'Analyse.

En 1820, il donnait un petit recueil de problèmes (Peacok, Herschel and Babbage. Examples...) et l'on pouvait croire que la nouvelle théorie serait bientôt l'objet de travaux suivis de la part des géomètres.

Cependant on doit reconnaître que ce n'est qu'occasionnellement que les analystes se sont occupés des parties principales de ce nouveau calcul : l'itération et la solution des équations [1].

Nous pourrions cependant citer de nombreuses notes et quelques Mémoires parus jusqu'à ces dernières années et se rapportant à notre sujet.

---

[1] Si le terme de *calcul fonctionnel* n'est peut-être pas très bien choisi (V. Ellis, *Mathematical Papers*), il nous semble que le mot d'*intégration* appliqué à la résolution des équations fonctionnelles n'a aucun sens.

? (probablement Cauchy), *Ann. Math. Gergonne*, p. 350.
Schweins, 1825, *Theorie der Differenzen und Differentiale.*
Abel, 1826, *J. de Cr.*, t. I, p. 11; *Œuvres*, t. I, p. 61.
— 1826, *J. de Cr.*, t. I, p. 322.
— 1827, *J. de Cr.*, t. II, p. 386; *Œuvres*, t. I, p. 389.
— ? *Œuvres*, t. II, p. 36.
— ? *Œuvres*, t. II, p. 189.
Crelle, 1837, *J. de Cr.*, t. XVII, p. 92.
Hill, *J. de Cr.*, t. VII, p. 104; t. IX, p. 100.
— *J. de Cr.*, t. XI, p. 241.
— *J. de Cr.*, t. XI,
— Elementa Matheseos Universæ.
Clausen, *J. de Cr.*, t. IV, p. 279.
— *J. de Cr.*, t. IX, p. 200.
Ramus, *J. de Cr.*, t. IX, p. 359.
Bellavitis, 1831, *Ann. d. Scienze*, Padova, t. I, p. 347.
Boole, 1844, *Phil. Trans.*,
Schlömilch, 1852, *Bericht. Leipzig.*
Lottner, *J. de Cr.*, t. XLVI, p. 367.
Beltrami, 1863, *Nouv. Ann.*, t. II, p. 191 et 302.
Dupain, 1866, *Nouv. Ann.*, t. V, p. 336 (¹).

Nous laissons de côté dans cette énumération rapide tout ce qui a été écrit sur l'itération de l'expression $y=\frac{ax+b}{cx+d}$.

Ce qui précède suffit toutefois pour montrer que le calcul fonctionnel avait déjà suffisamment attiré l'attention lorsque M. Schröder reprit quelques-unes de ces questions, croyant n'avoir eu que bien peu de prédécesseurs. (*Math. Ann.*, t. III.) Il paraît ne pas avoir eu connaissance des travaux de Hill, et cependant ce dernier avait signalé, il est juste de le reconnaître, l'importance de certaines questions effleurées maintenant à la

(¹) Au point de vue didactique, on doit ne pas oublier le *Traité des Différences* de Boole où le calcul fonctionnel occupe une large place et l'*Essai d'une exposition systématique du Calcul fonctionnel dans le cas d'une seule variable indépendante* publié par Liventsof dans la *Revue mathématique de Moscou*, t. VIII, 1er fascicule (Voir *Bull. Darboux*, t. I_2, p. 141).

suite de Schröder, par MM. Farkas et Kœnigs, mais non encore complètement résolues. Quoi qu'il en soit, nous ne voulions pas seulement ici rappeler à l'occasion du calcul fonctionnel, quelques noms importants et que l'on a tort de laisser dans l'oubli; nous voulions aussi attirer l'attention sur les conditions qui permettent de définir une fonction. La relation fonctionnelle à laquelle satisfait la fonction Γ est une des plus simples que l'on puisse concevoir, nous avons vu cependant que l'équation

$$\varphi(x+1) = x\varphi(x) \tag{1}$$

ne suffit pas à la définir; nous avons vu qu'il fallait y ajouter la condition

$$\lim \frac{\varphi(x+n)}{(n-1)!\,n^x} = 1.$$

Des conditions de nature semblable paraissent devoir se présenter pour des équations fonctionnelles de nature plus générale que l'équation (1).

Nous avons signalé rapidement les travaux de quelques analystes, mais nous n'avons pu parler de l'importance du calcul fonctionnel en physique mathématique et en physique moléculaire; nous avons dû également laisser de côté ses applications géométriques. Nous espérons avoir l'occasion de revenir sur cette branche importante de l'Analyse.

SUR LES

PRINCIPES TOXIQUES DES CHAMPIGNONS

PAR G. DUPETIT [1]

PRÉPARATEUR A LA STATION AGRONOMIQUE DU SUD-OUEST.

INTRODUCTION [2]

Parmi les plantes vénéneuses croissant dans nos pays, il est bien peu de phanérogames qui n'aient été l'objet d'études attentives. Les cryptogames, au contraire, ont été délaissés; ceux-ci, et en particulier les champignons, nous offrent cependant des espèces recélant des poisons très actifs qui se recommandent aux recherches des expérimentateurs par leurs remarquables propriétés physiologiques, et qui causent chaque année un nombre considérable de graves accidents que l'on ne pourra sûrement prévenir ou combattre que lorsqu'on sera en possession de connaissances complètes et certaines sur leurs causes immédiates.

L'oubli dans lequel est tombé cet important sujet d'études tient à des raisons multiples.

Ainsi qu'il a été dit bien des fois, on a fort négligé jusqu'à ces dernières années, dans les cours de botanique des Facultés de médecine, l'étude des champignons au point de vue qui nous occupe.

(1) M. Dupetit est décédé le 29 décembre 1886, à Savone (Italie).

(2) Ce travail a été trouvé, sous sa forme actuelle, dans les papiers laissés par M. Dupetit. Il avait été couronné, en 1885, par l'Académie des Sciences, Belles-Lettres et Arts de Bordeaux. On a cru devoir le publier sans aucun changement.

Cela tient évidemment à ce qu'il est fort difficile d'instituer un enseignement basé sur des notions insuffisantes et des assertions souvent contradictoires.

D'autre part, le peu de durée de la saison et les difficultés que l'on éprouve à récolter en abondance certaines espèces, ont beaucoup contribué à rendre plus courts et plus incomplets un grand nombre de travaux.

Il est à remarquer d'ailleurs que les principes vénéneux des champignons présentent des propriétés chimiques tout à fait exceptionnelles. Ainsi, les procédés généraux d'extraction des alcaloïdes ne leur sont pas applicables; là se trouve l'origine de bien des insuccès.

Le vaste champ de recherches que nous offre la question des principes toxiques des champignons m'a paru accessible, grâce aux récents progrès de la science. Favorisé par les moyens de travail que j'ai trouvés dans les laboratoires de la Faculté des sciences et de la Faculté de médecine, j'ai tenté de résoudre certaines parties de ce difficile problème.

Les premiers résultats que je viens soumettre à l'Académie n'auront pas de conséquences directement pratiques, pour ce qui est, du moins, des applications aux cas d'empoisonnement. J'ai l'espoir néanmoins que ces études pourront, tout en produisant un certain nombre d'idées et de faits nouveaux, rectifier des notions erronées, expliquer bien des contradictions et montrer le moyen d'éviter, dans un genre de recherches, des causes d'erreur qui avaient passé inaperçues jusqu'ici; enfin, et c'est là le point capital de ce travail, je me propose de démontrer qu'il faut ajouter aux alcaloïdes et aux glucosides, parmi lesquels se rangent tous les toxiques végétaux connus, une nouvelle catégorie de poisons appartenant à l'espèce chimique, bien différente, des *ferments solubles*.

Quelques-unes de mes expériences furent faites à la Faculté de médecine, dans le laboratoire de M. Oré, dont les travaux sur les champignons vénéneux m'inspirèrent l'idée d'entreprendre des études sur le même sujet, mais à un point de vue différent.

La plus grande partie de mon travail a été mise à exécution dans le laboratoire de la Station agronomique (Faculté des sciences). Grâce à M. Gayon, j'ai eu toutes facilités de mener à bien ces recherches.

Mon intention première était d'isoler les poisons de l'*Agaric bulbeux*, que l'on n'a pas encore séparés à l'état de pureté.

Au début de mes essais, le résultat fort inattendu d'une expérience m'ouvrit une voie totalement inexplorée. Voici comment :

Ayant été amené à administrer à des animaux, en injection hypodermique, un produit extrait de l'*Amanite bulbeuse*, comparativement avec le suc d'un champignon comestible, le Cèpe ou Bolet ordinaire, je fus très surpris de voir survenir la mort des animaux qui avaient reçu ce dernier liquide.

L'innocuité absolue du Bolet étant reconnue de tous, je crus d'abord à une erreur ou à un fait tout exceptionnel.

De nouveaux essais donnèrent cependant des résultats identiques au premier. Je devais donc admettre la présence d'un principe vénéneux dans le Bolet, qui, dans nos régions, est le champignon comestible par excellence.

Renonçant à mon premier projet, je résolus d'aborder immédiatement une étude incontestablement plus importante que celle des poisons dont l'existence était déjà bien démontrée.

HISTORIQUE

Dans les divers ouvrages, anciens ou récents, traitant des champignons, on trouve généralement l'indication des propriétés comestibles ou nuisibles d'un certain nombre d'espèces les plus communes et qui, par leurs formes ou leurs couleurs, attirent plus spécialement l'attention.

Au nombre de celles-ci, quelques-unes, telles que l'*Agaric bulbeux (Amanita phalloïdes)* et la fausse oronge *(Amanita muscaria)*, sont reconnues vénéneuses depuis fort longtemps; Bulliard en fait mention en 1790.

D'autres espèces, comme le *Boletus edulis* ou Cèpe et le champignon de couche *(Agaricus campestris)*, ont toujours été considérées comme comestibles.

Hormis un petit nombre de cas analogues, on consultera vainement les auteurs sur les qualités des champignons généralement répandus; il arrive presque toujours ou bien que les indications font défaut, ou que l'on se trouve en présence d'affirmations contraires, de telle sorte qu'il est presque impossible de se faire une opinion quelconque. Ainsi, l'*Agaricus nebularis* est comestible, selon Fries, tandis que Cordier le dit vénéneux. Le *Boletus luridus*, très dangereux d'après Lentz, est mangé communément en Lombardie, suivant les observations de Vittadini; Letellier affirme, d'après ses expériences, que ce champignon est indigeste, mais non vénéneux. L'*Amanita rubescens* serait toxique, si l'on en croit plusieurs auteurs; elle est comestible, selon Cordier.

Il convient cependant de reconnaître que cette déplorable confusion a été en partie dissipée depuis les publications récentes de quelques auteurs et notamment de M. Quélet.

Si nous jetons un coup d'œil sur les travaux ayant pour but d'isoler les principes actifs des espèces vénéneuses ou d'étudier leur action physiologique, nous constaterons encore combien nos connaissances sont incomplètes sur ce point.

Le premier essai d'extraction du poison des Amanites a été

tenté en 1826 par Letellier. Cet auteur a cru arriver à séparer un alcaloïde en soumettant le suc de champignon à l'action de la chaleur pour coaguler l'albumine et précipitant ensuite diverses autres matières par l'emploi successif de divers réactifs.

On comprendra aisément qu'un tel procédé n'ait donné aucun résultat sérieux et que le mélange complexe décoré du nom d'*amaniline* n'ait jamais été admis comme un composé défini.

Dans un mémoire dont plusieurs parties sont traitées habilement, M. Boudier décrit en 1866 un procédé analogue à celui de Stas, à l'aide duquel il a obtenu de l'*Agaric bulbeux* un produit qu'il nomme *bulbosine*.

La méthode employée par l'auteur, quoique moins imparfaite que celle de Letellier, est tout à fait insuffisante. La bulbosine, dont les propriétés toxiques n'ont même pas été bien constatées, doit être certainement constituée en majeure partie par des alcaloïdes, mais on ne peut la considérer comme un principe actif.

M. Boudier n'a pas mieux établi son opinion sur la substance qui cause l'âcreté des lactaires. Cette propriété serait due, selon l'auteur, à un principe résineux dont la saveur, très âcre quand la résine est en particules ténues, serait dépourvue d'âcreté quand les particules sont d'un diamètre double.

Letellier prétend, au contraire, et avec plus de vraisemblance, que l'âcreté des lactaires est attribuable à une substance soluble dans l'eau et non à une résine.

MM. Sicard et Schoras ont annoncé avoir extrait des amanites toxiques un alcaloïde formant des sels cristallisables et doué de propriétés physiologiques analogues à celles de la curarine; ce travail inachevé ne paraît pas avoir été poursuivi.

Selon M. Réveil, il existerait dans les amanites vénéneuses trois principes actifs : 1° un alcaloïde fixe, comme les autres auteurs l'indiquent; 2° un alcaloïde volatil; 3° une matière résineuse toxique. L'existence de l'alcaloïde volatil a été infirmée par MM. Borntrager et Kussmaul.

Un seul fait vient à l'appui de l'assertion de M. Réveil relative au poison résineux ; c'est l'action nocive de l'extrait alcoolique du

champignon, plus énergique que celle de l'extrait aqueux; les substances résineuses insolubles dans l'eau devaient, en effet, se trouver dans le premier extrait obtenu par l'alcool et non dans le second. On voit qu'il n'y a là aucune espèce de démonstration.

Si tous les travaux que je viens d'examiner laissent à désirer à bien des égards, il n'en est point ainsi de ceux de MM. Schemiedeberg, Koppe et Hartnack. Les deux premiers de ces auteurs ont retiré de l'*Amanita muscaria* (fausse oronge) deux alcaloïdes, l'un actif, la *muscarine*, l'autre physiologiquement inactif, l'*amaniline*. Cette dernière a été reconnue plus tard identique à la névrine.

La muscarine est certainement un des principes immédiats dont les propriétés et la constitution chimique sont le mieux connues.

Ces belles recherches ont été complétées par MM. Schemiedeberg et Hartnack, qui ont réalisé la synthèse de la muscarine en oxydant la névrine, dont elle ne diffère que par un atome d'oxygène.

M. Prévost, de Genève, a étudié les propriétés physiologiques du poison de la fausse oronge; il a précisé l'action de cet alcaloïde sur les principaux organes des animaux et a confirmé les observations des premiers expérimentateurs, en démontrant le remarquable antagonisme physiologique de la muscarine et de l'atropine.

Dans le but de rechercher les causes de divergences entre les mycologues, M. Bertillon a fait quelques expériences relatives aux qualités douteuses de quelques amanites. J'exposerai et je discuterai plus loin les conclusions de l'auteur, qui peuvent se résumer ainsi: Certains champignons vénéneux à l'état frais deviennent comestibles par la cuisson.

On doit à M. Oré d'importantes recherches sur l'*Agaric bulbeux*. Entre autres résultats, les expériences de M. Oré montrent qu'il existe dans l'*Amanite bulbeux* une substance dont les effets physiologiques se rapprochent beaucoup de ceux de la strychnine, ce qui la différencie nettement de la muscarine. Les chimistes trouveront dans ces faits le point de départ d'intéressantes recherches.

Les lésions du tube intestinal dans l'empoisonnement par

l'*Agaric bulbeux* ont fait l'objet d'une étude histologique due à M. Solles, de Bordeaux.

L'ergot de seigle a été le sujet de plusieurs travaux; l'extraction de l'alcaloïde actif, l'*ergotinine*, a été réalisée récemment par M. Tauret.

On peut résumer en quelques mots les données principales que nous possédons sur la question des principes toxiques des champignons :

1° Il y a dans la fausse oronge un alcaloïde très vénéneux, la *muscarine* (Schemiedeberg, Koppe, Hartnack);

2° L'*Amanite bulbeux* contient un alcaloïde ou glucoside tétanique (Oré);

3° La cuisson rend comestibles (?) quelques champignons vénéneux à l'état frais (Bertillon);

4° L'ergot de seigle contient un alcaloïde très toxique, l'*ergotinine* (Tauret).

CHAPITRE I

Recherche d'un principe toxique dans le *Boletus edulis*. Action de ce toxique sur les animaux.

§ I. — Existence dans le Bolet d'un principe toxique en injection hypodermique.

Expérience. — Du suc de *Boletus edulis*, obtenu par expression et filtré, est administré à deux cobayes en injection hypodermique à la dose de 2 centimètres cubes par 100 grammes de poids du corps de l'animal. Au bout de huit heures, les animaux restent immobiles et cessent de manger; vingt-quatre heures environ après l'injection, les deux cobayes sont morts sans avoir éprouvé aucun symptôme digne d'être noté.

Autopsie. — A l'endroit où l'injection a été pratiquée, on remarque de l'œdème; une incision faite à la peau laisse écouler quelques gouttes de liquide infiltré qui, examiné au microscope, montre quelques microbes (bâtonnets mobiles).

Les organes thoraciques et abdominaux ne présentent aucune lésion ou altération apparente.

On n'aperçoit pas de microbes dans la région du cœur.

De semblables expériences ont été instituées à plusieurs reprises et ont toujours donné le même résultat. Cependant la mort n'est survenue qu'au bout de trente-six à quarante-huit heures.

Si aux cobayes on substitue des rats, ceux-ci résistent plus longtemps à des doses de poison proportionnellement égales. Postérieurement, à l'occasion de recherches que je décrirai dans un des chapitres suivants, j'ai répété l'expérience sur des lapins; ces animaux, contrairement à ce qui a lieu pour les rats, meurent beaucoup plus tôt que les cobayes ayant subi l'injection du même liquide; la mort des lapins survient douze à dix-huit heures, parfois même trois à six heures après l'injection.

Des faits qui précèdent découlent ces conclusions :

1° Le Cèpe comestible ou *Boletus edulis* contient un principe capable de donner la mort;

2° Ce principe agit par voie hypodermique.

§ II. - Innocuité du Bolet en ingestion.

Expérience. — 25 centimètres cubes de suc de Bolet frais sont introduits, au moyen d'une sonde œsophagienne, dans l'estomac d'un cobaye pesant environ 300 grammes. Cette forte dose, correspondant à 8 centimètres cubes par 100 grammes de poids du corps, est quadruple de celle qui amène la mort en injection sous-cutanée.

Un second cobaye du poids de 400 grammes reçoit en injection sous-cutanée 8 centimètres cubes du même suc, soit une dose de 2 centimètres cubes pour 100 grammes égale, pour l'unité de poids, au quart de celle que le premier cobaye a ingérée.

Environ trente-six heures après, le second cobaye est mort, tandis que le premier n'a présenté à aucun moment le moindre signe de malaise.

Conclusion. — Le suc de Bolet administré en ingestion est sans action toxique.

§ III. — Influence de la chaleur sur l'action toxique du Bolet.

Quand on soumet du suc de Bolet à une température voisine de 100 degrés, le liquide devient fortement trouble par suite de la coagulation des matières albuminoïdes.

Expérience. — Le liquide chauffé et séparé du précipité par filtration a été administré en injection, à la dose ordinaire, à un lapin.

Un autre lapin a reçu parallèlement une égale dose du même suc *non chauffé.*

Ce dernier animal est mort en dix-huit heures. L'autre n'a rien éprouvé.

Conclusion. — Le suc de Bolet perd ses propriétés toxiques sous l'influence de la chaleur.

§ IV. — Considérations sur les expériences précédentes.

Le Bolet, bien que contenant un principe toxique, n'en est pas moins un champignon *comestible;* par cette qualification, on entend exprimer qu'une substance peut servir d'aliment et est dépourvue de propriétés nuisibles quand elle est introduite dans les voies digestives.

Toutefois, on peut se demander si, dans des conditions particulières du tube digestif, le poison pourrait être absorbé et occasionner alors des accidents comparables à ceux qu'amène l'injection hypodermique du suc.

Cette question, très difficile à résoudre, est fort heureusement sans importance dans la pratique, puisque la température de la cuisson fait disparaître tout danger d'intoxication.

Par un sentiment de prudence exagérée, on pourrait être tenté d'inférer de mes expériences qu'il convient de s'abstenir de l'usage du Cèpe. Une telle prohibition entraînerait, ainsi qu'on le verra plus loin, celle de tous les champignons et peut-être même de toutes les matières végétales, ce qui serait absurde.

§ V. — Examen critique des conclusions de divers auteurs.

Dans un travail, dont un résumé se trouve à l'article *Champignon* du *Dictionnaire de Dechambre,* M. Bertillon, après avoir montré que deux champignons de qualités douteuses, l'*Amanita rubescens* et l'*A. vaginata*, sont vénéneux en injection, mais perdent cette propriété par la cuisson, conclut de là que les affirmations contraires des divers auteurs relatives aux qualités des champignons cités résultent de ce que les expériences avaient porté indifféremment sur le champignon frais ou cuit; l'action d'une température élevée sur le principe actif n'avait pas été soupçonnée.

L'explication de M. Bertillon me semble fort juste, si toutefois les expériences en question ont été faites par voie hypodermique. Mais je ne saurais partager l'opinion de M. Bertillon quand il inter-

prète ses expériences en disant que les amanites étudiées sont rendues comestibles par la cuisson. Voici comment s'exprime l'auteur à ce sujet. Après avoir rappelé l'action bien connue de la chaleur sur quelques lactaires âcres, il ajoute : « Mais on ne savait » pas que le poison plus insidieux, puisqu'il est sans saveur, de » certaines amanites pût être détruit de même, et que c'est cette » propriété qui, dans certains pays, rend comestibles quelques » espèces dont les propriétés toxiques ont été montrées par des » expériences. On avait l'habitude d'attribuer aux différences de » climat ce qui n'était dû qu'à la préparation culinaire. »

M. Bertillon a évidemment cru pouvoir admettre, *a priori*, qu'une substance toxique en injection sous-cutanée devait agir de même par les voies digestives; cette déduction est inexacte pour l'*A. rubescens*, ainsi que je l'ai constaté, et très probablement pour l'*A. vaginata*.

Un tel raisonnement appliqué à l'interprétation des deux premières de mes expériences conduirait à une conclusion absolument infirmée par le troisième essai.

On doit donc, à mon avis, attribuer la plupart des contradictions relevées dans les écrits des auteurs, à l'insuffisance des expériences, trop peu variées, faites dans des conditions différentes et à des conclusions prématurées.

La seule méthode que l'on puisse employer avec sécurité quand il s'agira de décider si telle espèce est comestible, consiste à faire des essais sur les animaux par ingestion et dans des conditions aussi identiques que possible à celles de l'emploi dans l'alimentation.

CHAPITRE II

Nature du poison du Bolet.

§ I. — Hypothèses sur la nature du poison.

Après avoir démontré la présence dans le Bolet d'un principe toxique, il reste à le séparer des autres substances qui se trouvent dans le suc du champignon. Mais avant de faire choix d'un procédé de séparation, il est nécessaire d'être fixé sur la nature et sur quelques-unes des propriétés de l'agent toxique. L'interprétation des expériences déjà réalisées fournira, dans cet ordre d'idées, quelques indications et sera le point de départ des recherches suivantes.

Pour expliquer les effets toxiques du suc de Bolet, deux hypothèses peuvent être proposées :

a. Le poison est un ferment figuré, un microbe développé dans le suc du champignon et capable de se multiplier dans le sang des animaux, quand on l'y introduit directement.

b. Le poison est une substance soluble.

J'examinerai successivement ces deux hypothèses.

a. Pour bien saisir les raisons qui conduisent à considérer les microbes comme jouant un rôle important dans les phénomènes observés, il convient d'abord de développer quelques remarques sur une expérience du chapitre I.

La préparation du suc de champignon par simple expression est fort longue; la filtration l'est encore davantage, car le liquide contient en suspension des matières mucilagineuses et des spores qui obstruent rapidemeut les parois des filtres; aussi aperçoit-on, quand on examine au microscope le liquide prêt à être administré, un assez grand nombre de microbes qui se sont multipliés avec une rapidité d'autant plus grande que la température ambiante était plus élevée. Le suc de champignon est d'ailleurs un des

meilleurs liquides que je connaisse pour la culture de beaucoup d'organismes microscopiques; il est notamment très apte à subir une fermentation putride tout à fait comparable à celle des liquides d'origine animale. Les champignons contiennent, en effet, beaucoup de matières azotées solubles.

A l'autopsie des animaux ayant succombé à la suite d'une injection hypodermique de suc de Cèpe, on remarque souvent, ai-je dit, de l'œdème dont la sérosité, étudiée au microscope, a montré des organismes assez nombreux, en tout semblables à ceux que j'avais observés dans les sucs de champignon.

Si l'on rapproche de ces faits les résultats des beaux travaux de M. Pasteur sur les maladies parasitaires, on arrive aisément à adopter comme très vraisemblable la théorie qui explique la mort des animaux par une invasion microbienne impuissante à franchir les parois des organes de la digestion, une sorte de *septicémie* qui n'a plus lieu quand on *stérilise* le liquide, c'est-à-dire quand on détruit les organismes microscopiques par la chaleur.

Cependant j'ai examiné bien des fois, dans les autopsies, le sang des animaux immédiatement après la mort, et je dois dire que je n'y ai jamais constaté la présence des microbes.

Cette remarque ne diminue en rien, toutefois, la valeur des considérations précédentes, car la science nous offre plusieurs exemples de micro-organismes dont la réfringence est égale à celle du liquide qui les entoure, et que l'on ne peut apercevoir qu'à l'aide d'un artifice de coloration.

En résumé, la première hypothèse présente un caractère de grande probabilité. On ne sera donc pas surpris que j'aie porté au début toutes mes investigations dans cette voie et que j'aie tenu à multiplier et à varier les expériences relatives à ce point de la question, de façon à ne laisser subsister aucune incertitude.

b. Passons maintenant à la deuxième hypothèse, qui attribue les principes toxiques du Bolet à un poison inorganisé, incapable d'agir en ingestion; la curarine, dont l'élimination est relativement plus rapide que l'absorption par le tube digestif, nous offre un exemple de corps de ce genre.

Le seul argument favorable à l'existence d'un poison soluble est fourni par la constance de l'action toxique; cette constance implique dans la théorie des microbes la présence inévitable d'un germe septique.

Au moment où les expériences que je vais décrire ont été entreprises, les nombreux essais sur les lapins n'étaient pas exécutés; je n'avais pas encore observé des cas de mort rapide, difficilement conciliables avec la première hypothèse.

§ II. — Recherches sur le rôle des microbes.

a. — *Influence du développement des organismes.*

Expérience. — Deux cobayes reçoivent comparativement en injection sous-cutanée, l'un du suc de Bolet frais ne contenant que peu de microbes, l'autre du même suc exposé pendant vingt-quatre heures au contact de l'air à la température du laboratoire et contenant un grand nombre d'organismes.

Les deux cobayes sont morts à peu près dans le même temps, sans aucune différence appréciable dans les symptômes et dans les lésions.

Conclusion. — Le développement des organismes dans le suc de Bolet ne modifie pas ses propriétés toxiques.

b. — *Influence des antiseptiques.*

Un moyen fort simple d'empêcher le développement et d'affaiblir la virulence des microbes consiste, comme chacun sait, à introduire un antiseptique dans le liquide de culture. L'acide borique et l'acide salicylique, dépourvus d'action énergique sur l'organisme animal, m'ont paru d'un emploi convenable pour écarter l'influence des microbes cultivables dans le suc de champignon.

Expérience. — Un lapin reçoit en injection du suc de Bolet additionné d'acide borique; un second lapin reçoit une égale dose de suc salicylé; à un troisième enfin on a administré parallèlement le même suc sans addition.

Les trois animaux sont morts sans qu'on ait pu constater aucune

différence attribuable à l'influence des antiseptiques, si ce n'est peut-être une inflammation locale notablement moindre chez les deux premiers lapins.

Bien que cette expérience ait donné un résultat intéressant et digne d'être retenu, elle n'est point décisive. On peut supposer, en effet, que les germes, dont le développement a été simplement gêné, n'ont pas été détruits ou rendus stériles par les antiseptiques, et se sont développés après l'absorption de ceux-ci.

c. — Action de la stérilisation à froid.

Pour éliminer complètement les organismes et leurs germes sans faire intervenir la chaleur, j'ai employé le filtre Pasteur. Cet appareil est formé d'un tube en porcelaine dégourdie, fermé à une de ses extrémités, et dont les pores sont suffisamment étroits pour retenir les corps solides les plus ténus; le liquide, filtré à travers les parois du tube, s'écoule dans un ballon de verre fermé à l'accès des poussières de l'air; le tout est préalablement porté à une température de 200 degrés et refroidi avant chaque opération.

L'efficacité d'une stérilisation effectuée avec cet appareil est prouvée par la conservation indéfinie du liquide sans altération.

Expérience. — On administre selon le mode ordinaire à un cobaye du suc de Bolet stérilisé au moyen du filtre Pasteur; un autre cobaye reçoit une dose égale de suc non stérilisé.

Le dernier animal meurt dès le lendemain; le premier, qui a reçu le suc stérilisé, est mort seulement deux jours après.

Ce résultat ne présente pas la netteté que l'on était en droit d'espérer. Le principe toxique s'est-il modifié par la stérilisation? ou bien des germes septiques se sont-ils fortuitement introduits pendant l'injection, qui a été pratiquée à l'aide de la seringue ordinaire de Pravaz? Cet instrument avait été lavé plusieurs fois avec des solutions fortement antiseptiques, puis à l'eau distillée bouillie; mais il serait téméraire d'affirmer que tous les germes ont été ainsi détruits.

Afin de réaliser une expérience qui ne laissât rien à désirer, j'ai cherché à substituer un appareil stérilisable à la seringue à

injection ordinaire, dont plusieurs parties ne peuvent subir une température de 150 à 200 degrés sans être mises hors d'usage. Le nouvel appareil à injections hypodermiques stériles que j'ai construit pour atteindre ce but se compose d'un tube de verre gradué portant à sa partie inférieure un robinet de verre à l'extrémité duquel est fixée une aiguille d'acier creuse semblable à celles des seringues de Pravaz. A la partie supérieure du tube gradué se trouvent deux tubulures, dont l'une est destinée à l'introduction du liquide à injecter et l'autre à envoyer dans l'appareil de l'air comprimé servant à l'expulsion du liquide.

L'expérience précédente a donc été répétée, mais en injectant le liquide au moyen du nouvel appareil préalablement stérilisé.

Les précautions les plus minutieuses ont été prises pour empêcher l'entrée des germes de l'air pendant l'introduction du liquide dans l'appareil à injection, ainsi qu'au moment où l'aiguille a été glissée sous la peau de l'animal.

En opérant d'abord sur des cobayes, puis sur des lapins, le résultat a été identique à celui de la première expérience, c'est-à-dire que les animaux ayant reçu le liquide stérilisé sont morts, mais quelque temps après les autres.

L'élimination complète des microbes était cette fois absolument certaine. Pour en donner une nouvelle preuve, j'ai inoculé un peu de sang des deux lapins à deux autres de ces animaux; ceux-ci n'ont rien éprouvé; cela démontre bien que ni l'un ni l'autre des deux premiers n'avaient succombé à une invasion microbienne.

De plus, il a été impossible de trouver des organismes microscopiques, à l'autopsie, sous la peau des animaux, quand l'injection du liquide stérile a été faite avec toutes les précautions voulues.

Tous ces faits permettent de conclure en toute certitude :

1° La mort des animaux occasionnée par injection hypodermique du suc de Bolet n'est point le fait des microbes;

2° Le principe actif est donc un poison soluble;

3° Le poison du Bolet est affaibli par la stérilisation à froid du suc.

CHAPIRE III

Influence de la stérilisation à froid sur le principe actif du Bolet.

§ I. — Considérations et hypothèses sur cette influence.

Les expériences du précédent chapitre nous ont montré l'action inattendue de la stérilisation à froid sur un poison soluble.

Le procédé d'élimination des organismes microscopiques par filtration des liquides sur la terre poreuse a toute la valeur d'une méthode générale.

L'anomalie observée dans une application de ce procédé mérite donc d'être étudiée et cela d'autant mieux qu'il y a dans ce fait une cause d'erreur à laquelle je n'ai échappé qu'en employant dans mes expériences des doses élevées de suc de champignon.

Un opérateur qui répéterait mes essais, mais en injectant des quantités de liquides peu supérieures à la dose toxique minima, ne pourrait amener la mort des animaux en administrant du suc stérilisé à froid et arriverait ainsi à conclure contrairement à la vérité. Un tel résultat négatif s'est produit dans une de mes expériences de contrôle.

Ces diverses considérations m'ont conduit à penser qu'il serait fort utile de connaître exactement les causes déterminantes de ce phénomène.

L'affaiblissement du principe toxique peut s'expliquer :

a. Par l'action du vide qui aide à la filtration ;

b. Par le séjour prolongé du suc à l'abri du contact de l'air ;

c. Par une action directe de la substance constituant le filtre.

§ II. — Recherches expérimentales sur l'acti n de la stérilisation

a. — Action du vide.

Dans l'appareil Pasteur, la filtration des liquides sous la seule influence de la pesanteur est extrêmement lente; aussi, est-il

nécessaire, dans la plupart des cas, de faire le vide dans le ballon où s'écoule le liquide stérilisé.

Cette circonstance explique fort bien la disparition plus ou moins totale du principe actif si l'on admet que celui-ci est volatil. L'action dans le même sens, mais plus énergique, de la chaleur s'accorde bien avec cette hypothèse.

Expérience. — Une certaine quantité de suc de Bolet placé dans des vases à large surface est rapidement évaporée dans le vide jusqu'à siccité. Le résidu a été redissous dans de l'eau distillée et ramené au volume primitif.

Le liquide ainsi obtenu contenait évidemment tous les principes solubles de suc, excepté les matières volatiles à froid.

On administre à des lapins en injection sous-cutanée à la dose ordinaire :

1° Le suc évaporé et redissous;

2° Le même suc n'ayant subi aucun traitement;

Les deux lapins sont morts à peu près dans le même temps,

Conclusion. — L'affaiblissement du toxique dans la stérilisation à froid ne s'explique pas par l'action du vide.

b. — Action du séjour à l'abri de l'air.

Quand on expose pendant quelque temps le suc du Bolet au contact de l'air, on voit la coloration du liquide devenir de plus en plus foncée vraisemblablement par suite d'une oxydation. Cette action, qui s'accomplit aux dépens de l'oxygène de l'air, ne pourrait-elle s'effectuer par réduction du principe actif quand l'oxygène libre fait défaut, ainsi qu'il arrive avant et après le passage du liquide dans l'appareil de M. Pasteur?

Expérience. — Pour vérifier cette hypothèse, on administre en injection à des cobayes les liquides suivants :

1° Du suc de Bolet stérilisé à froid au moyen d'un appareil de M. Pasteur modifié, dans lequel la filtration était accélérée non par le vide, mais par de l'air comprimé exerçant une pression au-dessus du liquide à filtrer;

2° Du suc de Bolet conservé au contact de l'oxygène sous une large surface;

3° Du suc conservé dans l'hydrogène;

4° Du suc conservé dans l'air ozonisé;

5° Du suc n'ayant subi aucun traitement particulier.

Les animaux qui ont reçu ces derniers liquides sont morts, excepté le quatrième. Le premier ayant reçu le suc stérilisé au moyen de l'appareil modifié n'a succombé que longtemps après les autres, comme dans les autres cas d'injection de sucs stérilisés à froid.

Conclusions. — 1° Le contact de l'hydrogène et celui de l'oxygène sont sans influence sur les propriétés toxiques du Bolet;

2° Le principe actif est détruit par l'ozone.

c. — Action de la terre poreuse.

Il restait encore à vérifier la troisième hypothèse.

Expérience. — Un tube filtre de l'appareil Pasteur a été réduit en une poudre fine que l'on a introduit dans un flacon contenant du suc de champignon. Le contenu du flacon a été agité de temps en temps.

Après un contact d'une durée à peu près égale à celle d'une stérilisation, le liquide a été séparé de la poudre par une filtration au papier et administré à un lapin selon le mode ordinaire. Un autre lapin a reçu comparativement une portion du même suc n'ayant pas été soumise au contact de la terre poreuse.

Le second lapin est mort au bout de cinq heures, tandis que le premier n'est mort qu'après vingt-sept heures.

L'affaiblissement du principe toxique a été très manifeste, bien qu'il ait été moins accentué que dans les cas de filtration.

Conclusion. — L'affaiblissement des propriétés toxiques du suc de Bolet par stérilisation à froid est due à une action directe de la terre poreuse qui constitue le filtre.

CHAPITRE IV

Fonction chimique et extraction du poison du Bolet.

§ I. — Action des dissolvants.

Selon la méthode généralement usitée en pareil cas, j'ai cherché à séparer le poison du Bolet d'avec les autres principes immédiats du champignon, à l'aide d'un dissolvant approprié agissant soit sur le Bolet desséché, soit sur le résidu de l'évaporation du suc.

Après quelques essais préliminaires, j'ai adopté le procédé qui consiste à épuiser par le dissolvant le champignon préalablement desséché.

Expérience. — Des fragments de *Boletus edulis* desséchés dans le vide en présence de l'acide sulfurique ont été grossièrement pulvérisés et introduits dans un appareil à déplacement.

La matière a été épuisée successivement par l'éther et par l'alcool.

Les deux dissolvants chargés de principes immédiats ont été évaporés dans le vide et le résidu repris par l'eau.

On a administré à des animaux en injection hypodermique les solutions aqueuses ainsi obtenues, sans provoquer le moindre accident d'intoxication.

La matière épuisée par l'éther et l'alcool a été ensuite traitée par l'eau après l'évaporation du dernier dissolvant. La dissolution aqueuse filtrée a été injectée sous la peau des cobayes à une dose correspondant à la quantité de suc injectée dans les expériences précédentes. Les animaux sont morts au bout d'un temps un peu plus long que dans les cas d'injection du suc.

Si l'on substitue dans ces essais le chloroforme à l'éther et l'alcool méthylique à l'alcool ordinaire, on obtient les mêmes résultats négatifs.

L'insolubilité dans l'alcool du principe toxique a été encore

constatée en mettant le dissolvant au contact du résidu obtenu par l'évaporation du suc dans le vide. L'agent toxique subsiste, dans la partie insoluble, mais avec un affaiblissement notable, ce qui paraît attribuable à une altération partielle causée par l'alcool.

CONCLUSION. — 1° Le principe toxique est insoluble dans le chloroforme, l'éther, l'alcool ordinaire, l'alcool méthylique;

2° Le contact de l'alcool affaiblit le principe actif.

§ II. — SÉPARATION PAR ENTRAINEMENT.

Le défaut de solubilité dans les véhicules cités est peu favorable à l'hypothèse d'un poison appartenant à la classe des glucosides ou des alcaloïdes. L'action de la chaleur et de l'alcool sur le principe toxique est tout à fait semblable à celle des mêmes agents sur les ferments solubles.

On verra par les résultats exposés plus loin qu'entre les ferments solubles et le principe actif du Bolet, l'analogie est complète; aussi désignerai-je dès maintenant ce dernier, pour la clarté de l'exposition, sous le nom de *mycozymase*.

Une des méthodes recommandées pour l'extraction des ferments solubles consiste à traiter les solutions qui les contiennent par des substances capables de produire un précipité amorphe qui dans sa formation entraîne la zymase à l'état insoluble.

Expérience. — Une certaine quantité du suc de champignon a été additionnée d'acide phosphorique étendu, puis d'un lait de chaux pure en quantité exactement nécessaire pour neutraliser le mélange en formant un précipité de phosphate de chaux.

Le liquide, séparé du précipité, a été administré à des cobayes par voie hypodermique. A la suite de l'injection, les animaux ont été visiblement malades pendant plusieurs jours; ils sont ensuite revenus peu à peu à la santé.

En traitant par l'eau distillée seule ou légèrement acidulée le précipité de phosphate de chaux, on réussit, non sans peine, à en retirer une petite quantité du principe toxique. Le faible rendement obtenu dans cette opération m'a fait renoncer à l'employer comme procédé d'extraction. Il est à remarquer d'ailleurs que

cette méthode appliquée à la séparation des divers autres ferments solubles ne donne pas des résultats beaucoup plus avantageux.

Dans une autre série d'essais, j'ai traité le suc de Bolet par l'hydrate de plomb récemment précipité; une autre portion de suc a été additionnée de tannin, une troisième partie, de tannin, puis d'une petite quantité d'eau de chaux.

Comme dans la première expérience, ces traitements ont eu pour effet de priver presque complètement le suc de ses propriétés toxiques. Mais quand j'ai voulu extraire de ces précipités la substance active, je n'ai obtenu que des quantités très faibles et j'ai dû renoncer à cette méthode de séparation.

Des faits que je viens d'exposer on peut conclure :

1° Les précipités de phosphate de chaux, d'hydrate de plomb, de tannin, de tannate de chaux entraînent la plus grande partie du poison contenu dans le suc de Bolet;

2° On peut extraire des précipités une partie du principe actif;

3° Le principe toxique du Bolet présente les principaux caractères des ferments solubles. Je propose de le dénommer *mycozymase.*

§ III. — Extraction de la mycozymase.

Après avoir tenté sans succès d'appliquer à la séparation de la mycozymase divers procédés généralement en usage, j'ai essayé un mode d'extraction basé sur l'insolubilité du ferment dans l'alcool.

Cette méthode, appliquée avec quelques précautions que je vais décrire, donne des résultats satisfaisants tout en évitant des manipulations compliquées. Voici le mode opératoire que j'ai adopté.

Les champignons sont coupés en petits morceaux (et non broyés), puis exprimés par petites portions; si l'on broyait les champignons avant de les soumettre à la presse, on obtiendrait un suc riche en matières mucilagineuses, difficiles à filtrer et fournissant une plus grande quantité d'impuretés mêlées au principe actif.

Le suc obtenu doit être filtré avec le plus grand soin. Quand on fait usage de filtres en papier, l'opération est beaucoup trop longue. Il est préférable d'employer un filtre à amiante composé d'un entonnoir en verre rempli jusqu'au tiers d'amiante coupée; l'entonnoir est adapté à un flacon dans lequel on fait le vide pour accélérer l'écoulement du liquide.

On verse en mince filet le suc filtré dans cinq volumes d'alcool à 96 degrés, en agitant continuellement. Il est essentiel de ne pas faire l'inverse, c'est-à-dire de verser l'alcool dans le suc. Le mélange est ensuite abandonné au repos jusqu'à ce que le précipité floconneux blanc qui s'est formé soit rassemblé en presque totalité au fond du vase, ce qui a lieu au bout d'un quart d'heure à vingt minutes.

A ce moment, on décante à l'aide d'un siphon le liquide clair ou légèrement trouble qui se trouve au-dessus du précipité. Le liquide qui contient celui-ci est jeté sur un filtre de batiste.

Quand le précipité s'est rassemblé en une couche adhérente au tissu et que le passage du liquide devient très lent, on rassemble les bords de l'étoffe et on exerce une pression modérée, mais suffisante pour augmenter la rapidité de l'écoulement de l'alcool sans entraîner le précipité.

La majeure partie de l'alcool est bientôt expulsée; une nouvelle quantité peut être encore enlevée en pressant le nouet de batiste entre des feuilles de papier à filtrer.

On obtient ainsi une masse plastique qu'il faut se hâter de soustraire à l'humidité dont elle est très avide, en l'introduisant sous la cloche d'une machine pneumatique; on dispose sous la cloche une large surface d'acide sulfurique de façon à produire une dessiccation aussi rapide que possible.

Après avoir été desséché, le produit est broyé et introduit dans un flacon bouché à l'émeri dont le bouchon a été soigneusement paraffiné. Dans ces conditions, la mycozymase conserve très longtemps toutes ses propriétés.

A partir de l'instant où la précipitation par l'alcool a été faite, il faut effectuer les opérations suivantes avec la plus grande

célérité afin d'éviter le contact prolongé de la mycozymase avec l'alcool.

En appliquant le procédé tel qu'il vient d'être décrit, on obtient dix grammes de mycozymase sèche par litre de suc.

§ IV. — Propriétés chimiques et physiques de la mycozymase.

La mycozymase, au moment de sa précipitation par l'alcool, est blanche; après la dessiccation, elle se présente sous forme d'une poudre grise, inodore si elle est bien sèche, lentement mais entièrement soluble dans l'eau distillée. La solution aqueuse est colorée et présente une odeur marquée de champignon frais; soumise à la chaleur, elle donne un abondant précipité floconneux.

Pour justifier par de nouveaux faits la qualification de ferment soluble et la dénomination de mycozymase que j'ai attribuée au poison du Bolet, j'ai cherché à faire agir la mycozymase, préparée comme il vient d'être dit, sur divers composés susceptibles d'être modifiés dans leur constitution chimique par les ferments solubles déjà connus.

La saccharose et l'amidon ne fournissent aucune trace sensible de glucose sous l'influence de la mycozymase. Mais si l'on ajoute une petite quantité de ce produit à une solution d'amygdaline maintenue à une température de 40 degrés, le mélange présente au bout de quelque temps une forte odeur d'amandes amères et réduit énergiquement et immédiatement la liqueur cupro-potassique Une portion de solution d'amygdaline sans addition de ferment placée comparativement ne subit aucune modification sensible; il en est de même d'une autre partie additionnée de mycozymase préalablement chauffée à 100 degrés après avoir été dissoute.

L'amygdaline est donc nettement dédoublée par la mycozymase; mais l'action d'une chaleur de 100 degrés qui fait disparaître les propriétés toxiques du ferment, détruit de même en celui-ci la propriété de décomposer l'amygdaline.

Conclusion. — Lè produit précipité du suc de Bolet par l'alcool contient une substance capable de dédoubler l'amygdaline.

§ V. — Propriétés toxiques de la mycozymase.

a. — Nous avons vu que la proportion de mycozymase obtenue par précipitation est égale à environ un centième du poids du suc traité. Si le principe actif était précipité en totalité et sans altération, la dose toxique de mycozymase d'après la dose de suc sera de 0,02 centigrammes pour 100 grammes de poids du corps de l'animal. Mais comme la précipitation n'est pas absolument totale et que l'alcool altère partiellement le principe toxique, il faut dans la pratique une dose double, soit 0,04 centigrammes pour produire sûrement la mort des animaux.

Le précipité de mycozymase possède donc une activité toujours égale à celle de cinquante fois son poids du suc de Bolet.

En réalité, la dose mortelle de mycozymase pure doit être bien inférieure à celle que je viens d'indiquer; le produit obtenu contient en effet la totalité des albuminoïdes et une partie des matières nucilagineuses et colorantes du suc.

b. Est-il permis d'identifier le principe toxique du Bolet et l'agent qui dédouble l'amygdaline?

La concomitance de l'action toxique et de la fonction de ferment soluble s'explique naturellement en attribuant ces phénomènes à une seule et même substance.

Dans l'état actuel de la science on ne peut isoler les ferments solubles à l'état de pureté; il est donc impossible d'arriver à une parfaite solution de la question posée. Aussi me bornerai-je à présenter comme très probable la conclusion suivante :

La mycozymaze dédoublant l'amygdaline n'est autre que le principe toxique.

CHAPITRE V

Recherche des mycozymases dans divers champignons comestibles et vénéneux.

§ I. — Expériences sur les champignons comestibles.

Quand on administre aux animaux, en injection hypodermique à la dose ordinaire, du suc d'*Agaricus campestris* cultivé, ou champignon de couche, on observe des effets analogues à ceux que produit le suc de Bolet, mais presque toujours moins intenses; aussi la mort survient-elle rarement. L'origine de moindre activité de l'Agaric se trouve peut-être dans la pauvreté relative des plantes cultivées en principes actifs ou sapides.

Les autres champignons comestibles que j'ai essayés se sont montrés toxiques, par injection hypodermique du suc frais, au même degré que le Bolet; ces champignons sont : l'*Amanita rubescens*, l'*A. vaginata* et l'*A. cesaria* ou oronge vraie. Faute de temps, je n'ai pu reproduire avec ces champignons toutes les expériences que j'avais faites dans les recherches relatives au Bolet; je ne saurais dire si les mycozymases de ces amanites sont absolument identiques à celle du Cèpe; toutefois, je n'ai constaté aucune différence dans leur action physiologique. De plus, le dédoublement de l'amygdaline a pu être obtenu avec le ferment retiré de l'*A. rubescens* comme avec celui du Bolet.

Conclusion. — L'*Agaricus campestris*, l'*A. rubescens*, l'*A. vaginata* et l'*A. cesaria* contiennent des mycozymases semblables à celle du Bolet.

§ II. — Expériences sur l'Amanite bulbeuse.

Il m'a paru intéressant de rechercher dans les champignons vénéneux, comme l'*Amanite bulbeuse*, des mycozymases analogues à celles des espèces comestibles.

Dans une expérience, j'ai administré comparativement en injec-

tion hypodermique à des cobayes, du suc d'Agaric bulbeux frais et le même suc chauffé à 100°. L'effet de la chaleur a été d'atténuer considérablement les propriétés toxiques du suc. La différence d'activité toxique des deux liquides injectés a été si grande, surtout quand l'application de la chaleur a été prolongée, qu'elle ne pouvait s'expliquer que par l'existence d'une proportion considérable de mycozymase dans le suc ou par une décomposition partielle des alcaloïdes vénéneux sous l'influence de la chaleur.

La seconde hypothèse s'accorde bien avec le résultat d'une autre expérience dans laquelle les sucs préparés dans les mêmes conditions que dans l'essai précédent ont été donnés en ingestion. Les animaux ayant ingéré le suc chauffé sont morts longtemps après ceux qui avaient reçu le suc frais; le rôle des mycozymases ne saurait être mis en cause dans ce cas.

Le résultat cherché a été obtenu en effectuant la séparation préalable des alcaloïdes à l'aide de l'alcool.

Expérience. — Une certaine quantité de suc d'Agaric bulbeux a été évaporée à froid dans le vide presque à siccité. Le résidu a été additionné peu à peu d'alcool absolu et broyé au sein de ce liquide.

Les matières insolubles ont été recueillies sur un filtre et lavées jusqu'à épuisement complet, puis redissoutes dans l'eau distillée.

La solution aqueuse des matières insolubles dans l'alcool a été injectée à un cobaye en proportion correspondante à la dose toxique du suc de Bolet. Un autre cobaye a reçu une dose double en ingestion.

Le premier cobaye est mort après douze heures; le second n'a présenté aucune apparence de maladie.

Conclusion. — L'Agaric bulbeux contient une mycozymase toxique analogue à celle du Bolet.

§ III. — Ferments solubles toxiques dans les phanérogames et chez les animaux.

Les ferments solubles des champignons ne sont pas les seuls qui soient doués de propriétés toxiques. Il résulte de quelques

expériences encore incomplètes que certaines plantes phanérogames comestibles peuvent donner lieu à des accidents d'intoxication analogues à ceux que j'ai provoqués avec le Bolet. D'autre part, MM. Béchamp et Baltus ont montré que la pepsine et la diastase sont toxiques en injection intraveineuse.

Certains poisons d'origine animale me semblent devoir être probablement de même nature que les mycozymases. Chacun sait, par exemple, que le venin du serpent peut être ingéré sans danger; de plus il a été constaté que la chaleur faisait disparaître les propriétés nocives de cette substance. On a cru pouvoir inférer de là que le venin doit son activité à des microbes.

Cette assertion est manifestement invraisemblable puisqu'une dose peu considérable de venin peut occasionner la mort au bout d'un temps très court. Mais dans l'hypothèse d'un poison ferment soluble, tous les faits observés s'expliquent aisément.

CHAPITRE VI

Action comparée des champignons comestibles et vénéneux sur les animaux à sang froid.

§ I. — Action des champignons et des mycozymases sur les grenouilles.

Dans les diverses expériences exposées jusqu'ici, les seuls animaux qui aient été employés sont les lapins et les cobayes.

J'avais projeté d'étudier l'action des mycozymases sur les carnivores et sur des animaux appartenant à diverses classes différentes. La longue durée de mes premières recherches ne m'a permis de mener à bien que les essais sur les grenouilles.

Le suc de Bolet ou la mycozymase qu'on en retire, injectée à la dose ordinaire sous la peau des grenouilles, ne produisent qu'un effet presque nul; si l'on force la dose, ces batraciens meurent parfois au bout de plusieurs jours, mais le plus souvent ils reviennent à l'état normal après être restés engourdis pendant quelque temps.

J'ai essayé de la même manière l'action de divers autres champignons, l'*Agaricus campestris*, l'*A. vaginata* et l'*A. cœsaria* qui ont tous produit des effets analogues à ceux du Bolet.

On obtient des résultats bien différents si l'on administre le suc d'*Amanita rubescens*. Ce champignon, qui est comestible au même titre que le Bolet et qui contient une mycozymase agissant sur les lapins et les cobayes, comme celle des autres champignons, est néanmoins extrêmement vénéneux pour les grenouilles.

Une dose d'un centimètre cube ou même de demi-centimètre cube de suc suffit presque toujours pour amener la mort de ces animaux en un quart d'heure à demi-heure; l'activité toxique est un peu moindre quand les champignons ont été récoltés par un temps humide.

Supposant que ces propriétés pourraient tenir à la présence

dans l'*Amanita rubescens* de très petites quantités d'alcaloïdes toxiques analogues à celles des espèces très vénéneuses, j'ai administré à des grenouilles comparativement les sucs des principales espèces toxiques de notre région, l'*Amanita phalloides*, l'*A. muscaria*, l'*A. mappa*, l'*A. pantherina*.

A ma grande surprise tous ces champignons se sont montrés à peu près inoffensifs, sauf l'*A. phalloides*, qui, sans avoir des propriétés aussi énergiques que l'*A. rubescens*, tue quelquefois les grenouilles au bout d'un jour ou deux. Les résultats de ces expériences sur les grenouilles sont donc précisément contraires à ceux que l'on obtiendrait en donnant les mêmes champignons en ingestion à des animaux à sang chaud. On voit par là combien sont loin de la vérité les conclusions sur les propriétés dangereuses ou alimentaires des champignons que l'on a cru pouvoir déduire des expériences sur les animaux à sang froid.

En resumé :

1° Les champignons comestibles *Agaricus campestris*, *A. vaginata*, *A. cæsaria*, *Boletus edulis*, sont presque complètement dépourvus d'activité toxique sur les grenouilles;

2° L'*A. rubescens* contient une substance extrêmement vénéneuse pour les animaux ;

3° Les champignons très vénéneux *A. muscaria*, *A. mappa*, *A. pantherina* ne sont pas plus toxiques pour les grenouilles que les champignons comestibles. L'*A. phalloides* a une action plus marquée.

§ II. — SÉPARATION DU POISON DES GRENOUILLES CONTENU DANS L'*A. rubescens*.

Les remarquables propriétés de l'*A. rubescens* sont-elles dues à une mycozymase ou à un poison appartenant à une autre série chimique?

Expérience. — Pour résoudre cette question, j'ai préparé du suc d'Amanite par expression et j'ai soumis ce liquide à l'évaporation à froid sous la cloche de la machine pneumatique. Le résidu de l'évaporation a été repris par l'alcool concentré. La partie insoluble

dans ce liquide, après avoir été lavée sur un filtre et desséchée pour expulser l'alcool, a été redissoute dans l'eau.

La solution aqueuse contenant la mycozymase a été administrée à des grenouilles en proportion triple de celle qui correspond à la dose toxique du suc.

Les grenouilles n'ont éprouvé que des effets presque nuls, semblables à ceux de la mycozymase du Bolet.

Le principe cherché était donc entré en dissolution dans l'alcool ou avait été détruit par celui-ci.

La solution alcoolique séparée de la mycozymase a été évaporée à froid et le résidu repris par l'eau distillée.

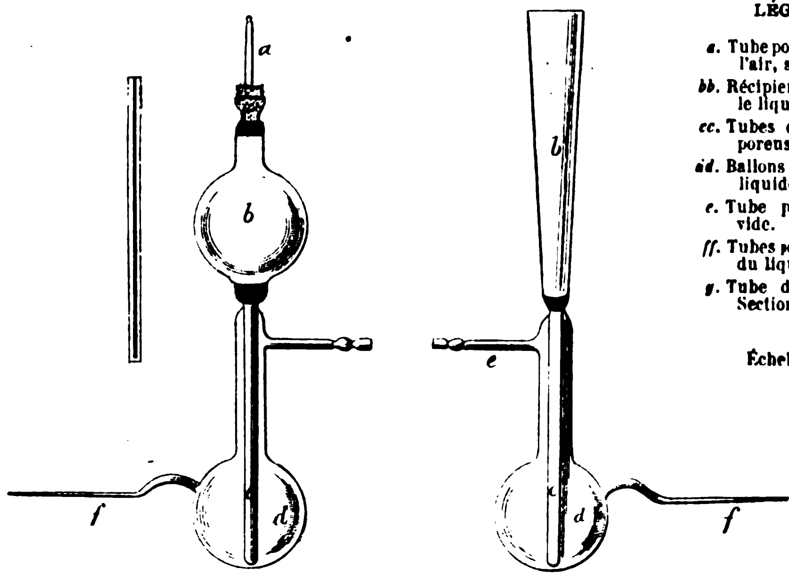
La solution ainsi obtenue a été injectée sous la peau des grenouilles en quantité calculée d'après la dose active du suc.

Au bout de quinze à vingt minutes, les grenouilles sont mortes commes celle qui avaient reçu le suc d'Amanite.

Le poison de la grenouille se trouve donc intact dans la partie du suc soluble dans l'alcool.

Conclusion. — 1° Le principe toxique pour les grenouilles contenu dans l'*A. rubescens* est distinct de la mycozymase;

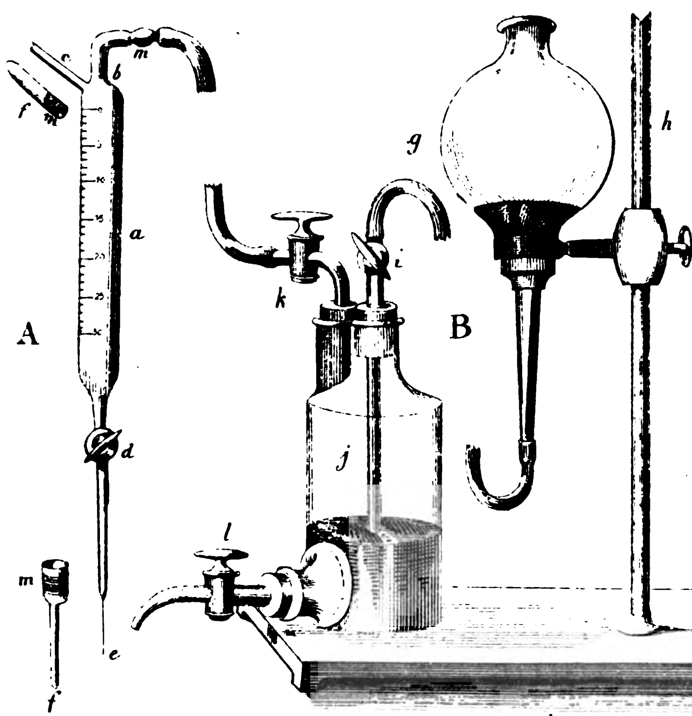
2° Ce principe, soluble dans l'alcool, est probablement un alcaloïde ou un glucoside.



LÉGENDE

a. Tube pour comprimer l'air, s'adapte à *k*.
bb. Récipients contenant le liquide à filtrer.
cc. Tubes en porcelaine poreuse.
dd. Ballons recueillant le liquide filtré.
e. Tube pour faire le vide.
ff. Tubes pour écoulement du liquide.
g. Tube de porcelaine. Section.

Échelle au $\frac{1}{5}$



LÉGENDE

A. Seringue à injections stériles hypodermiques.
B. Appareil à comprimer l'air.

a. Tube gradué.
b. Tube pour l'air comprimé.
c. Tube à arrivée du liquide.
d. Robinet.
e. Aiguille d'acier, creuse.
g. Réservoir à mercure mobile.
i. Tube à arrivée du mercure.
j. Flacon à compression d'air.
k. Échappement de l'air.
l. Robinet à écoulement du mercure.
ff. Tubes qui, adaptés en *c* et *e*, empêchent l'introduction des germes.
m. Bourre de coton

Échelle au $\frac{1}{5}$

LE

PÉTIOLE DES DICOTYLÉDONES

AU POINT DE VUE

DE L'ANATOMIE COMPARÉE ET DE LA TAXINOMIE

PAR LOUIS PETIT

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

HISTORIQUE.

La plupart des organes des végétaux ont été l'objet d'études comparatives, et nous possédons des travaux d'ensemble sur la tige, la racine, le style, les nectaires, les anthères, etc. Il n'en est pas de même du pétiole : excepté chez les Fougères, son étude a été le plus souvent négligée, même par les auteurs qui se sont occupés de la feuille, et qui ont fait principalement porter leur examen sur le limbe. Le parcours des faisceaux libéro-ligneux notamment y est très peu connu, et à cet égard nos connaissances n'ont guère fait de progrès depuis deux cents ans.

Grew, en effet, dans son *Anatomie des plantes* (1), décrit l'arrangement des faisceaux libéro-ligneux du pétiole. Il y reconnaît deux dispositions principales : « les fibres que la tige pousse pour former les feuilles ne sont pas jointes ensemble et rangées en ligne droite dans les pédicules ou queues de ces feuilles; mais elles sont toujours en angle ou en circonférence. » Grew ajoute que ces fibres ne sont ainsi disposées dans les « pédicules » des feuilles que pour leur donner de la force. Il complète sa descrip-

(1) *Anatomy of plants*. Traduction française. Paris, 1675.

tion en y joignant dix figures schématiques de coupes transversales de pétiole d'Endive, de Tussilage, de Chicorée, de Lierre, de Cabaret, de Menthe, de Lapathum, de Verbascum et de Chou.

Mirbel (1) s'est aussi occupé de la disposition des faisceaux libéro-ligneux dans le pétiole. « Quand les filets vasculaires du pétiole sont disposés en cylindre ou en gouttière, ils se soutiennent mutuellement et chacun met obstacle à la flexion des autres; c'est ce qui a lieu dans la plupart des feuilles. Mais quand ces filets sont rangés sur un même plan, ils cèdent à la fois, le pétiole est très flexible et le moindre mouvement de l'air agite la feuille. C'est ce qui paraît dans plusieurs peupliers et surtout dans les trembles. »

« La structure de l'articulation pétiolaire n'offre rien de compliqué. Les filets vasculaires, au lieu de marcher séparément comme dans le reste du pétiole, se réunissent en un seul filet et produisent ainsi une articulation ». Nous verrons plus loin que cette réunion des faisceaux ne se produit pas toujours dans les pétioles articulés.

Pour de Candolle, « les pétioles, quelles que soient leur forme et leur nature, sont composés de fibres parallèles entre elles, et si le parallélisme n'est pas rigoureux, les fibres y sont généralement plus écartées vers le bas et plus rapprochées vers le haut (2). » De Candolle ne parle point des anastomoses et des ramifications qui se produisent dans un grand nombre de pétioles.

Brongniart, dans ses *Recherches sur la structure et la fonction des feuilles* (3), s'est exclusivement occupé du limbe dans lequel il néglige l'étude des nervures.

Dans son mémoire *Sur le réveil et le sommeil des plantes* (4), Dutrochet décrit le renflement pétiolaire du Haricot, du *Mimosa pudica* et de l'*Hedysarum strobiliferum*. Il figure une coupe

---

(1) Mirbel, *Éléments de Physiologie végétale et de Botanique*, p. 148, 1815.

(2) Aug.-Pyr. de Candolle, *Organographie végétale*. 1827.

(3) *Ann. Sc. nat.*, 1re série, t. XXI, 1830.

(4) Dutrochet, *Mémoires pour servir à l'histoire anatomique des animaux et des végétaux*. 1837.

transversale de ce renflement dans les deux dernières espèces. (Pl. 16, fig. 3 et 5.)

En 1856, M. Chatin [1] commence la publication de son *Anatomie comparée des végétaux;* la structure du pétiole n'y tient que peu de place.

En 1858, M. Nœgeli fait paraître son mémoire *Sur la disposition des faisceaux vasculaires de la tige.* Il étudie soigneusement le parcours des faisceaux foliaires dans cet organe, mais ne le poursuit pas dans le pétiole [2].

En 1864, Frank [3] donne une bonne description du trajet des faisceaux libéro-ligneux dans le pétiole du *Quercus pedunculata.* Dans une note il indique, mais fort incomplètement, le trajet des faisceaux du *Populus nigra.*

En 1865, M. Trécul [4] indique le moyen de distinguer différentes Légumineuses, par la recherche des cellules à tannin, sur une coupe transversale de tige ou de pétiole.

En 1866, M. Trécul [5], en s'appuyant encore sur l'examen des tissus sécréteurs, indique comment une simple coupe de tige ou seulement de pétiole, suffit pour distinguer des Aroïdées, appartenant à des tribus ou à des genres différents.

Le même auteur décrit dans une note [6] le système libéro-ligneux du pétiole du *Pastinaca sativa,* parce qu'il renferme des *faisceaux composés*, c'est-à-dire « formés de deux, de trois, de quatre faisceaux agrégés par leur partie libérienne ». Le pétiole des *Aralia chinensis* et *spinosa* renferme des faisceaux qui s'unissent non plus par leur liber, mais par leur bois.

---

(1) A. Chatin, *Anatomie comparée des végétaux.* 1856-1870.

(2) Nœgeli, *Das Wachsthum des Stammes und der Wurzel bei den Gefässpflanzen und die Anordnung der Gefässstränge in Stengel* (*Beiträge zur wissenschaftlichen Botanik.* Leipzig, 1858).

(3) Frank, *Ein Beitrag zur Kenntniss der Gefässbündel* (*Botanische Zeitung,* 1864).

(4) Trécul, *Du Tannin chez les Légumineuses* (*Institut,* 8 février 1865).

(5) Trécul, *Des Vaisseaux propres dans les Aroïdées* (*Comptes rendus,* 1866, t. LXII, p. 31).

(6) Trécul, *Structure anormale dans quelques végétaux et en particulier dans les racines du* MYRRHIS ODORATA (*Comptes rendus,* 1866, t. LXIII, p. 247).

M. Trécul s'occupe, dans un mémoire paru la même année [1], de la disposition des faisceaux libéro-ligneux dans le pétiole des Ombellifères. En général, « que les faisceaux fibro-vasculaires soient disposés suivant un arc, ou suivant un cercle, avec faisceaux dans le centre (*Pastinaca*, *Heracleum*) ou sans faisceaux au centre, ils sont toujours séparés par de larges espaces cellulaires, ce qui n'a pas lieu dans la tige, et ne s'entrelacent les uns aux autres qu'aux endroits qui portent les pétioles secondaires ou les divisions de la feuille. Là également il est facile de trouver des anastomoses, quelquefois même des réticulations des canaux oléo-résineux mêlés aux faisceaux du plexus vasculaire ».

En 1867, M. Trécul [2] décrit le parcours des faisceaux dans les *Panax Cooki, crassifolium*, *Lessonii*, dans le *Fatzia japonica* et divers *Aralia*.

En 1868, M. C. de Candolle [3] fait paraître sa *Théorie de la feuille*. Il figure schématiquement quelques coupes transversales pratiquées au milieu du pétiole. Il ne s'occupe pas du trajet des faisceaux dans cet organe, ou bien il le décrit d'une façon très vague. Il fait remarquer qu'une foule de feuilles articulées sont en réalité privées de nœuds.

En 1874, M. Johannès Chatin [4] publie une thèse sur la feuille, où il traite sommairement du pétiole.

La même année, M. de Lanessan [5], dans le but de prouver que les faisceaux libéro-ligneux ne présentent pas toujours une symétrie bilatérale dans les pétioles, étudie quelques-uns de ces organes. Il trouve, par exemple, que le système libéro-ligneux est disposé en cercle très régulier chez le *Cupania*, le *Roupala*

---

[1] Trécul, *Des Vaisseaux propres chez les Ombellifères* (*Ann. Sc. nat.*, 5e série, t. VI, 1866).

[2] Trécul, *Des Vaisseaux propres chez les Araliacées* (*Ann. Sc. nat.*, 5e série, t. VII, 1867).

[3] C. de Candolle, *Théorie de la feuille* (*Archives des Sciences physiques et naturelles de Genève*, 1868).

[4] Johannès Chatin, *De la Feuille*. (Thèse d'agrégation.)

[5] De Lanessan, *Observations sur la disposition des faisceaux fibro-vasculaires dans les feuilles* (*Comptes rendus*, 1874, t. LXXVIII, p. 891).

corcovadensis, le *Geranium anemonæfolium*; que dans certaines plantes comme *Nandina domestica, Anamirta Cocculus*, on trouve suivant la hauteur à laquelle on coupe le pétiole, soit la disposition circulaire, soit la disposition en arc.

Dans son mémoire sur le *Principe mécanique*, M. Schwendener s'occupe surtout des Monocotylédones. Il ne consacre que quelques lignes au pétiole des Dicotylédones. « Beaucoup de pétioles, dit-il, se comportent comme des organes caulinaires, résistant à la flexion. Par exemple, le *Ricinus communis*, le *Lupinus floribunda*, l'*Aralia japonica*, *edulis* et *hispida*, le *Rhus glabra*,... etc. (1). »

Dans son *Anatomie comparée*, M. de Bary parle très brièvement du pétiole (2); il ne consacre que quelques lignes à la disposition de ses faisceaux libéro-ligneux. « En général, dit-il, les faisceaux parcourent le pétiole en droite ligne, jusqu'au limbe, quand il y en a plusieurs, ils se ramifient et se relient par des anastomoses. Nombreux, ils sont sur une coupe transversale, disposés soit en arc ouvert en haut, soit en anneau, ou répartis sur toute la surface de la coupe. »

En 1879, M. Casimir de Candolle publie un mémoire sur l'*Anatomie comparée des feuilles* (3). Dans ce travail, il ne s'occupe pas du parcours des faisceaux. Il indique seulement leur disposition sur une coupe transversale faite d'ordinaire au milieu du pétiole. Je reviendrai du reste sur ce mémoire dans le résumé général qui termine mon travail.

L'année suivante, M. Lotar étudie le parcours des faisceaux pétiolaires de quelques Cucurbitacées (4).

En 1881, M. Haberlandt, dans son mémoire sur le *Tissu*

---

(1) Dr S. Schwendener, *Das mecanische Princip in anatomischen Bau der Monocotylen, etc.* Leipzig, 1874, p. 156.

(2) A. de Bary, *Vergleichende Anatomie der Vegetationsorgane*, 1877, p. 310, 421, 433.

(3) C. de Candolle, *Anatomie comparée des feuilles chez quelques familles de Dicotylédones* (*Mémoires de la Société de Physique et d'Histoire naturelle de Genève*, t. XXVI, 1879).

(4) H. Lotar, *Anatomie comparée des organes végétatifs et des téguments séminaux des Cucurbitacées*. Lille, 1880.

assimilateur des plantes (1), laisse de côté l'étude du pétiole, pour s'occuper exclusivement du limbe.

M. Jules Vesque, dans un mémoire sur les *Ranales* (2), paru en 1881, décrit et figure la disposition du système libéro-ligneux dans quelques pétioles, d'après des coupes transversales faites au milieu de cet organe. Il ne s'occupe pas du trajet des faisceaux. Il déclare « qu'il ne faut pas chercher de caractères de famille dans l'étude du pétiole, le long et patient travail publié par M. de Candolle le prouve surabondamment (3). Je crois cependant que mes recherches démontrent le contraire.

Le même auteur, dans son *Essai d'une monographie anatomique et descriptive de la tribu des Capparées (Capparidées ligneuses)* (4), indique la disposition du système libéro-ligneux d'un grand nombre de pétioles, toujours sur une coupe pratiquée au milieu de cet organe.

En 1882, M. Lemaire publie un travail sur les feuilles médicinales (5), mais il néglige volontairement l'étude du pétiole.

Le mémoire de M. Briosi *Sull' Anatomia delle foglie* (6) est exclusivement consacré à la feuille de l'*Eucalyptus globulus*.

En 1883, paraissent deux mémoires de M. Vesque : l'un sur les Caryophyllinées (7), qui, dans le cas actuel, n'a pas d'intérêt pour nous, puisque dans ce groupe la plupart des feuilles sont sessiles; l'autre sur les Pariétales (8), où il indique pour quelques pétioles l'arrangement des faisceaux libéro-ligneux.

M. Marié, dans ses *Recherches sur la structure des Renon-*

---

(1) C. Haberlandt, *Vergleichende Anatomie der Assimilatorischen Gewebesystems der Pflanzen* (*Jahrbücher für wissenschaftliche Botanik,* 13 Band, 1881).

(2) Julien Vesque, *De l'Anatomie des tissus appliquée à la classification des plantes* (*Nouvelles Archives du Muséum,* 1881).

(3) *Loc cit.*, p. 20.

(4) *Ann. Sc. nat.*, 6e série, t. XIII, 1882.

(5) Adrien Lemaire, *De la Détermination historique des feuilles médicinales*, Nancy, 1882.

(6) *Atti dell' Accademia dei Lincei,* VI, 1882.

(7) *Ann. Sc. nat.*, 6e série, t. XV, 1883.

(8) *Nouvelles Archives du Muséum d'Histoire naturelle*, 2e série, t. V, 1883.

culacées (1), étudie la racine, la tige, le pédicelle floral et la feuille d'un grand nombre de ces plantes. Ses descriptions du pétiole se rapportent à une coupe faite au milieu de cet organe; il ne s'occupe pas du trajet des faisceaux libéro-ligneux.

La même année, M. Gérard étudie la *structure des Pomacées*, et décrit notamment le parcours des faisceaux libéro-ligneux dans le pétiole de ces plantes (2).

Dans son *Traité de Botanique* (3), M. Van Tieghem résume d'une façon très complète nos connaissances sur la structure du pétiole. Il est facile de se convaincre, en lisant les passages qu'il consacre à cette question, que nous manquons sur ce sujet de notions précises, surtout en ce qui concerne le trajet des faisceaux libéro-ligneux.

En 1885, M. J. Vesque fait connaître les *Caractères des principales familles gamopétales tirés de l'anatomie de la feuille* (4). Dans ce mémoire, comme dans ceux du même auteur que j'ai déjà signalés, l'étude du pétiole a peu d'importance.

Dans ses *Recherches sur le péricycle*, M. L. Morot en étudie la disposition dans quelques pétioles (5).

M. Ferdinand Debray, dans son travail sur les Pipéracées, examine le parcours des faisceaux libéro-ligneux dans le pétiole de quelques-unes de ces plantes, appartenant aux trois tribus des Saururées, des Pipérées et des Pépéromiées (6).

Enfin, dans un travail paru cette année même, M. O. Lignier (7) décrit le trajet des faisceaux libéro-ligneux dans le pétiole d'un certain nombre de Calycanthées, de Mélastomacées et de Myrtacées.

---

(1) Paul Marié, *Recherches sur la structure des Renonculacées*. Paris, 1884.

(2) Thèse d'agrégation, 1884.

(3) Ph. Van Tieghem, *Traité de Botanique*, 1884, p. 310, 810.

(4) Julien Vesque, *Ann. Sc. nat.*, 7e série, t. I, 1885.

(5) *Ann. Sc. nat.*, 6e série, t. XX, 1885.

(6) Ferdinand Debray, *Étude comparative des caractères anatomiques et du parcours des faisceaux fibro-vasculaires des Pipéracées*. Paris, 1886.

(7) O. Lignier, *Recherches sur l'anatomie comparée des Calycantées, des Mélastomacées et des Myrtacées* (*Archives scientifiques du nord de la France*, année 1886, parue en 1887).

OBJET ET PLAN DU MÉMOIRE.

Dans le présent travail, je me propose de combler en partie la lacune, que l'historique précédent nous révèle dans nos connaissances touchant l'anatomie du pétiole des Dicotylédones. En conséquence, j'étudierai la structure générale du pétiole et plus particulièrement le trajet des faisceaux dans les principales familles naturelles appartenant aux trois groupes des Apétales, des Dialypétales et des Gamopétales.

J'examinerai un certain nombre de genres [1] dans chaque famille, et j'en déduirai pour chacune d'elles les caractères généraux du pétiole. Puis je terminerai mon travail par une vue d'ensemble sur l'anatomie de cet organe.

Je laisserai de côté l'étude des stipules [2] : en général, leurs faisceaux libéro-ligneux sont indépendants de ceux du pétiole, au moins en dehors de la tige.

La plupart du temps, j'ai négligé l'étude du tissu sécréteur; il a été du reste l'objet de nombreux travaux, notamment de la part de MM. Trécul et Van Tieghem, et j'ai eu soin de signaler son existence et la nature de ses éléments à propos des caractères généraux du pétiole dans les différentes familles.

On constate d'ordinaire qu'il se produit, avec l'âge, des variations dans la nature des tissus du pétiole, des complications dans l'arrangement de ses faisceaux libéro-ligneux : aussi, pour rendre les résultats comparables, j'ai fait porter mes recherches uniquement sur les feuilles adultes.

---

[1] Dans l'étude des genres, je suivrai habituellement l'ordre adopté par MM. Bentham et Hooker dans leur *Genera plantarum*.

[2] Ce travail vient d'être fait par M. Colomb, qui a publié, au mois de juillet de cette année, ses *Recherches sur les Stipules*.

TECHNIQUE.

On ne peut songer à étudier le parcours des faisceaux libéroligneux du pétiole à l'aide de dissociations. Souvent elles détruiraient les faisceaux les plus grêles, les anastomoses les plus fines, dont la résistance peut être moins grande que celle du tissu conjonctif ambiant; dans d'autres cas, les faisceaux sont si ténus et si enchevêtrés que ce procédé ne fournirait pas beaucoup d'éclaircissements. Aussi ai-je eu exclusivement recours à la méthode des coupes.

Lorsque le trajet des faisceaux est compliqué, il est intéressant d'avoir une préparation où les différentes coupes du pétiole soient fixées invariablement dans leur ordre naturel : à cet effet, je les monte dans le baume de Canada, après les avoir fortement colorées par le violet de méthylaniline; sous l'action ménagée de l'alcool absolu employé pour les déshydrater, tous les tissus se décolorent, à l'exception des parties lignifiées qui restent colorées en bleu.

OBSERVATIONS PRÉLIMINAIRES.

Avant de commencer l'étude du pétiole, il est nécessaire d'expliquer certains termes qui reviennent fréquemment dans le cours de ce travail.

Je dois dire d'abord que dans mes descriptions je suppose le pétiole horizontal; son plan de symétrie vertical (1) : on y distingue alors une face supérieure plus ou moins aplatie, une face inférieure arrondie ou anguleuse. L'extrémité du pétiole adhérente à la tige est l'*extrémité initiale* ou *caulinaire*, ou la *base;* l'extrémité attenant au limbe est l'*extrémité terminale* ou *foliaire*, ou le *sommet*.

---

(1) J'admets ici que le pétiole n'est pas tordu, ce qui est le cas ordinaire.

J'appelle *coupe initiale* ou simplement *initiale* la coupe transversale faite à la base du pétiole. Lorsque cet organe possède une gaine, je désigne sous le nom de *pseudo-initiale* la coupe transversale pratiquée immédiatement au-dessus de cette gaine. La *caractéristique* est la coupe transversale du sommet du pétiole. Nous verrons par la suite que c'est en effet la coupe la plus intéressante à considérer; qu'elle suffit à caractériser des espèces, des genres, ou des familles : de là son nom. A moins d'indications contraires, mes descriptions se rapportent toujours à cette coupe.

Je désigne par abréviation la paroi externe des cellules épidermiques, y compris la cuticule, sous le nom de *membrane externe.*

Pour fixer les idées, j'ai indiqué les dimensions de chaque pétiole : L désigne sa *longueur;* cette longueur est parfois représentée par deux nombres réunis par le signe + : le premier exprime la longueur de la gaine; le second, la longueur de l'autre partie du pétiole; *l* est la *largeur* de la caractéristique, c'est-à-dire sa plus grande dimension dans le sens horizontal; *e*, son épaisseur, c'est-à-dire sa plus grande dimension dans le sens vertical.

Les chiffres entre parenthèses représentent, quand il s'agit de la membrane externe, son épaisseur exprimée en μ. Lorsqu'il est question du parcours des faisceaux, ces chiffres désignent la distance des différentes coupes, comptées en millimètres à partir de la base du pétiole.

APÉTALES.

URTICACÉES [1].

1° URTICÉES.

Urtica dioica L. [2] (Pl. II, fig. 1.)

$L = 31^{mm}$; $l = 1^{mm}6$; $e = 1^{mm}3$. — Poils urticants de 2^{mm} environ. La caractéristique a une forme trilobée. On y trouve du collenchyme principalement dans les parties saillantes, du tissu conjonctif formé de cellules rondes, méatiques, à parois minces, renfermant de grosses mâcles d'oxalate de chaux. Il existe cinq faisceaux libéro-ligneux, d'autres fois sept, par suite de la ramification des faisceaux supérieurs. Il ne se produit pas d'anastomose entre ces faisceaux.

Le système libéro-ligneux débute par cinq faisceaux.

Parietaria officinalis L. (Pl. II, fig. 2.)

$L = 4^{mm}$; $l = 0^{mm}7$; $e = 0^{mm}6$. — Poils subulés, unicellulaires de $0^{mm}5$, enchâssés dans l'épiderme. La caractéristique, à peu près cordiforme, renferme un hypoderme formé d'une assise de cellules collenchymateuses; cette assise manque à la partie supérieure. Le tissu conjonctif est formé de cellules polygonales, sans méats pour la plupart, et contient de grosses mâcles. Le système libéro-ligneux conserve la même disposition dans toute la longueur du pétiole : il se compose de trois faisceaux parallèles.

En somme, le pétiole du *Parietaria officinalis* ne diffère de celui de l'*Urtica dioica* que par le nombre des faisceaux.

---

(1) Dans ses *Recherches sur les Urticinées*, publiées en 1879, M. Sophrone Fugairon ne s'occupe que de la tige de ces plantes.

(2) L'*Urtica dioica* a été, de la part de M. Gravis, l'objet d'un mémoire détaillé intitulé : *Recherches anatomiques sur les organes végétatifs de l'Urtica dioica.* 1885.

Bœhmeria utilis Hook. (Pl. II, fig. 40.)

L = 70^{mm}; l = 1^{mm}5; e = 2^{mm}. — Poils subulés unicellulaires de 600 μ, enchâssés dans l'épiderme. La caractéristique a la forme d'un trèfle. L'hypoderme se compose de deux ou trois rangées de cellules collenchymateuses. Le parenchyme cortical et la moelle contiennent des cellules polygonales à parois minces, ne laissant entre elles que de très petits méats. On y trouve des mâcles; celles-ci sont beaucoup plus abondantes dans le liber. Les faisceaux libéro-ligneux sont disposés en cercle. Ils sont au nombre de cinq à la caractéristique. On en compte sept à l'initiale, mais les deux supérieurs se rapprochent et finissent par se souder vers 50^{mm}.

2° CONOCÉPHALÉES.

Cecropia peltata.

l = 7^{mm}; e = 7^{mm}2. — Poils coniques de 100 μ, enchâssés dans l'épiderme. Caractéristique à peu près circulaire. La membrane externe est très mince (2 μ). On compte dans l'hypoderme collenchymateux une vingtaine d'assises. Le parenchyme cortical est formé de cellules polygonales à parois minces, à méats nuls ou très petits; on y rencontre des canaux sécréteurs et des mâcles. Les uns et les autres font défaut dans la moelle composée de grandes cellules polygonales. Le système libéro-ligneux est disposé suivant un cercle où les faisceaux, au nombre d'une trentaine environ, sont alternativement saillants et rentrants. Le liber renferme des mâcles d'oxalate de chaux.

3° ARTOCARPÉES.

Artocarpus integrifolia. (Pl. II, fig. 7.)

L = 8^{mm}; l = 2^{mm}5; e = 2^{mm}20. — Les poils sont de trois sortes : 1° courts, dont la base très renflée s'enfonce dans le parenchyme cortical et dont la pointe, longue de 100 μ, est dirigée du côté du limbe (pl. VI, fig. 64, a); 2° poils longs, de 150 μ, dirigés d'abord vers la base du pétiole, mais recourbant leur extrémité vers son sommet (pl. VI, fig. 64, b); 3° petits poils

glanduleux, sessiles. La membrane externe est très mince (3 μ). Au-dessous de l'épiderme, on trouve environ sept assises de cellules collenchymateuses, passant insensiblement à des cellules méatiques et à parois minces, qui peuvent renfermer des mâcles. Le système libéro-ligneux comporte sept faisceaux disposés en cercle. On trouve, à peu de chose près, la même disposition à l'initiale. Il faut, en outre, mentionner deux faisceaux libériens intra-médullaires.

Ficus elastica. (Pl. II, fig. 4.)

$L = 90^{mm}$; $l = 5^{mm}5$; $e = 4^{mm}5$. — Glabre. La caractéristique est une ellipse aplatie à la partie supérieure. Les cellules épidermiques, quadrangulaires ou rectangulaires, sont petites; leur membrane externe est épaisse (15 à 20 μ) et se colore entièrement avec le violet d'aniline. Il existe un hypoderme collenchymateux. Le tissu conjonctif se compose de cellules rondes, à parois épaisses, méatiques sauf dans la couche périphérique. Le système libéro-ligneux est disposé en ellipse ouverte en haut, fragmentée en cinq ou sept parties. Dans l'intérieur de cette ellipse, on aperçoit quelques faisceaux libériens. Le liber renferme des mâcles et des cristaux isolés, on rencontre aussi ces derniers dans le tissu conjonctif. En contact avec le liber, on trouve quelques fibres scléreuses.

A l'initiale, le système libéro-ligneux a la même disposition annulaire qu'à la caractéristique; seulement l'anneau est complètement fermé en haut.

Les *F. repens* (pl. II, fig. 5) et *Carica* (pl. II, fig. 6) présentent les mêmes caractères généraux que le *F. elastica*. Il faut noter seulement la subérification de deux ou trois assises périphériques dans le *F. repens* et l'absence de cristaux dans le *F. carica*, ce qui est une anomalie.

Castilloa elastica. (Pl. II, fig. 18.)

Le système libéro-ligneux forme un anneau continu autour duquel on voit de rares fibres scléreuses. Le *C. elastica* se différencie des *Ficus*, que j'ai étudiés précisément, par la continuité

de cet anneau; il s'en distingue encore par l'abondance de ses grosses mâcles et par ses faisceaux libéro-ligneux intra-médullaires.

4° MORÉES.

Morus alba L. (Pl. II, fig. 10.)

$L = 32^{mm}$; $l = 4^{mm}5$; $e = 3^{mm}5$. — Petits poils unicellulaires de 15 à 45 μ, à parois épaisses. La caractéristique est une ellipse échancrée à la partie supérieure. La membrane externe est de 5 μ; elle se colore entièrement par le violet d'aniline.

L'hypoderme comprend sept ou huit assises de cellules collenchymateuses; les cellules sous-jacentes sont méatiques, à parois minces; il en est de même des cellules médullaires. Le système libéro-ligneux est disposé en anneau interrompu en haut. On trouve également quelques faisceaux libéro-ligneux intra-médullaires. La disposition est la même à l'initiale, mais l'anneau est fragmenté. On trouve des mâcles dans le tissu conjonctif et dans le liber.

Le pétiole du *Morus nigra* ne paraît guère différer de celui du *M. alba* que par ses dimensions plus petites.

Broussonetia papyrifera Welld. (Pl. II, fig. 12.)

$L = 57^{mm}$; $l = 2^{mm}5$; $e = 2^{mm}35$. — La structure générale du *Broussonetia* est la même que celle du *Morus*. Je me bornerai à signaler quelques traits distinctifs. Les poils sont de trois sortes : 1° petits, unicellulaires, subulés, de 50 μ; 2° grands, de 1^{mm}; 3° glanduleux, pédonculés de 35 μ. L'hypoderme est nettement collenchymateux. L'anneau libéro-ligneux est partagé en cinq fragments. Il en est ainsi dès l'initiale. La moelle renferme des faisceaux exclusivement libériens.

Maclura aurantiaca Nutt. (Pl. II, fig. 13.)

$L = 30^{mm}$; $l = 1^{mm}6$; $e = 1^{mm}4$. — La caractéristique présente les plus grandes analogies avec celle du *Broussonetia papyrifera*. Ici encore nous retrouvons trois sortes de poils, un hypoderme collenchymateux, des faisceaux libériens intra-médullaires, cinq faisceaux libéro-ligneux disposés en anneau. Le mode

de formation de ces faisceaux est particulier. A l'initiale on n'en trouve que trois qui donnent naissance aux deux supérieurs de la manière indiquée par le schéma. (Pl. I, fig. 16.)

Dorstenia Massoni. (Pl. II, fig. 14.)

L = 13^{mm}; *l* = 1^{mm}50; *e* = 1^{mm}45. — Poils de deux sortes : les uns de 300 μ unicellulaires, subulés, à parois épaisses ; les autres glanduleux, sessiles, de 50 μ. L'hypoderme est formé par deux assises de parenchyme sans méats. Le tissu conjonctif se compose de grandes cellules rondes, méatiques. A l'initiale il existe trois faisceaux libéro-ligneux ; mais les deux supérieurs se dédoublent, et l'on en trouve cinq à la caractéristique. Le *Dorstenia Massoni* ne renferme pas de cristaux.

5° CANNABINÉES.

Humulus lupulus L. (Pl. II, fig. 8.)

L = 85^{mm}; *l* = 1^{mm}6; *e* = 1^{mm}3. — Poils dont l'extrémité est tantôt en pointe, tantôt en navette. La caractéristique affecte une forme hexagonale avec une échancrure dans le haut, une pointe dans le bas. L'hypoderme est formé de trois assises de collenchyme. Le tissu conjonctif se compose de cellules polygonales à parois minces et petits méats. Il renferme des mâcles ainsi que le liber. Le système libéro-ligneux forme un anneau ouvert en haut. On peut y distinguer sept faisceaux qui sont réunis par leur liber. A l'initiale, les faisceaux sont complètement distincts.

Cannabis sativa L. (Pl. II, fig. 9.)

L = 50^{mm}; *l* = 1^{mm}2; *e* = 1^{mm}3. — Poils recourbés vers le limbe. La structure est la même que dans l'*Humulus lupulus*; je ne signalerai que les différences. La caractéristique est pentagonale. Le système libéro-ligneux a la forme d'un C; il en est ainsi dès l'initiale. Les cellules cristalligènes sont surtout abondantes à la périphérie de la moelle où elles revêtent le bois d'une couche continue.

6° CELTIDÉES.

Celtis australis. L. (Pl. II, fig. 15.)

$L = 10^{mm}$; $l = 1^{mm}6$; $e = 1^{mm}$. — Poils de 100 μ subulés, unicellulaires, à parois épaisses. La caractéristique est une ellipse échancrée en haut. Le tissu conjonctif est formé de cellules à parois épaisses, sans méats. On y trouve des mâcles, mais surtout des cristaux isolés. Le système libéro-ligneux a la forme d'un petit arc de cercle décomposable en trois faisceaux qui sont complètement soudés à l'initiale. On y aperçoit un peu de sclérenchyme.

7° ULMÉES.

Planera crenata Desf. (Pl. II, fig. 16.)

$L = 10^{mm}$; $l = 1^{mm}2$; $e = 0^{mm}8$. — Poils unicellulaires enchâssés dans l'épiderme. La membrane externe n'a que 3 μ d'épaisseur. Comme dans le *Celtis australis*, la caractéristique est une ellipse avec échancrure supérieure. Du reste, les pétioles de ces deux plantes offrent les mêmes caractères. Ici l'hypoderme est nettement collenchymateux.

Il n'y a pas de cristaux isolés, mais des mâcles, principalement abondantes dans le liber. Le système libéro-ligneux est en arc de cercle trilobé. Il débute par trois faisceaux distincts : c'est l'inverse dans le *Celtis*.

Ulmus campestris Sm. (Pl. II, fig. 17.)

$L = 9^{mm}$; $l = 1^{mm}6$; $e = 1^{mm}4$. — Poils subulés, unicellulaires, pouvant atteindre 300 μ. Caractéristique cordiforme. Le collenchyme hypodermique est beaucoup moins développé que dans le genre précédent. Les cellules médullaires rondes, à parois minces, sont plus petites que celles du parenchyme cortical. Les cristaux isolés sont surtout abondants dans le liber. Le système libéro-ligneux se compose, à la base du pétiole, de trois faisceaux qui plus loin se soudent en anneau. Plus loin encore, nous voyons cet anneau s'ouvrir, de manière à former

un U. Suivant la tranche considérée, il se produit, dans l'orientation de l'anneau, des changements qui indiquent l'influence de la torsion du pétiole sur les faisceaux. Il existe au bord du liber quelques fibres scléreuses. On trouve aussi quelques faisceaux libéro-ligneux intra-médullaires.

Caractères communs. — Dans cette famille, le pétiole offre un certain nombre de caractères qui font rarement défaut; ce sont : la présence de mâcles d'oxalate de chaux, l'existence d'un hypoderme collenchymateux, l'absence de sclérenchyme; ce dernier tissu, quand il existe, n'est représenté que par quelques fibres [1]. Je signalerai aussi l'existence de faisceaux intra-médullaires et le manque habituel de branches anastomotiques entre les faisceaux. Un grand nombre d'Urticacées, notamment les Morées et les Artocarpées, contiennent des laticifères.

L'étude de cette famille suggère une remarque; c'est que dans les plantes herbacées *(Urtica, Parietaria)*, les faisceaux libéro-ligneux sont grêles, périphériques, distants les uns des autres et nuls dans la portion médiane supérieure. Tandis que dans les plantes arborescentes, les faisceaux sont comparativement beaucoup plus gros, plus rapprochés du centre; tantôt ils restent distincts, disposés en cercle *(Maclura, Broussonetia)*; tantôt ils se soudnet pour former soit des arcs de cercle *(Planera, Celtis)*, soit des anneaux *(Ficus, Castilloa)*. Le pétiole de l'*Humulus Lupulus*, plante herbacée, mais de taille élevée, nous offre une organisation intermédiaire : en effet, sa caractéristique possède sept faisceaux ligneux distincts, mais réunis par un anneau libérien.

POLYGONACÉES.

Polygonum lapathifolium (var. **nodosum**). (Pl. II, fig. 19.)

$L = 15^{mm}$; $l = 2^{mm}45$; $e = 1^{mm}80$. — Poils plurisériés, un peu épineux de 335 μ. La caractéristique a la forme d'un demi-

---

(1) Ceci nous montre, en passant, qu'il ne se forme pas nécessairement de sclérenchyme dans le pétiole des plantes ligneuses; en revanche, nous en trouverons dans celui de certaines plantes herbacées (Renonculacées, Crucifères, etc.).

cercle avec deux lobes latéro-supérieurs. La membrane externe a une épaisseur de 6 μ; l'hypoderme comprend deux à trois assises de cellules collenchymateuses. Le parenchyme cortical se compose de cellules rondes laissant entre elles des canaux aérifères, tandis que les cellules de la moelle sont plus grandes, polygonales et leurs méats très petits. Ces deux tissus renferment de volumineuses mâcles. Les faisceaux sont disposés suivant une ligne parallèle au contour de la caractéristique. On en compte quatorze; le faisceau médian supérieur est beaucoup plus gros que les autres; nous retrouverons la même particularité dans les autres espèces de *Polygonum*. A l'initiale, la disposition est la même; il n'y a de différence que dans le nombre des faisceaux, qui est un peu moindre.

Les *P. Bistorta, amphibium, cuspidatum* (pl. II, fig. 19, 21, 22) diffèrent les uns des autres et du précédent par la forme de leur caractéristique, de légères variations dans la disposition des faisceaux et surtout par la structure du tissu conjonctif. Ces différences s'expliquent par la diversité des habitats. Le *P. lapathifolium* habite les bords des ruisseaux; nous avons vu que son parenchyme cortical renferme des canaux aérifères; ceux-ci sont beaucoup plus développés dans le *P. amphibium*, qui vit dans l'eau. Le *P. Bistorta*, qui est moins hygrophile, ne présente que des méats; il en est de même dans le *P. cuspidatum*, mais les méats sont moins grands, sans doute parce que cette plante vit dans des lieux plus secs.

Il faut aussi noter dans ce genre *Polygonum* l'absence de sclérenchyme; cependant le pétiole du *P. Bistorta* en présente un peu, mais à sa base seulement.

Rumex obtusifolius D. C. (Pl. II, fig. 25.)

$L = 270^{mm}$; $l = 4^{mm}5$; $e = 4^{mm}5$. — Poils rares, claviformes, de 250 μ. La caractéristique présente des sinuosités qui renferment des îlots de collenchyme; elles correspondent aux faisceaux libéro-ligneux. Ceux-ci sont nombreux : on en compte vingt-deux principaux dans la préparation dessinée (pl. II, fig. 25). Les faisceaux

périphériques sont symétriques. Le tissu conjonctif est formé de grandes cellules rondes ou ovales, méatiques; certaines renferment de belles mâcles d'oxalate de chaux.

On trouve déjà à l'initiale la majeure partie des faisceaux de la caractéristique; les deux faisceaux latéraux manquant de chaque côté (il n'y en a que quatre au lieu de six) apparaissent à mesure qu'on avance dans le pétiole; quant aux faisceaux internes, à part les deux plus gros qui ne varient pas, ils s'anastomosent et se ramifient d'une façon irrégulière.

Rumex Hydrolapathum Huds. (Pl. II, fig. 26.)

$L = 120^{mm}$; $l = 7^{mm}5$; $e = 8^{mm}5$. — Les caractères généraux sont les mêmes que dans l'espèce précédente. Les faisceaux sont plus nombreux, et leurs deux pôles sont coiffés d'arc de sclérenchyme fibreux. On remarquera que, malgré leur grand nombre, les faisceaux périphériques ne laissent pas de présenter une disposition symétrique. Enfin les méats du tissu conjonctif sont plus développés que dans l'espèce précédente; cette différence s'explique encore par la différence d'habitat : le *R. Hydrolapathum* vivant au bord de l'eau, tandis que le *R. obtusifolius* végète dans les endroits simplement humides.

Rumex Acetosa L.

La forme générale de la caractéristique est triangulaire, son contour est sinueux et dans les parties saillantes on trouve de minces couches de collenchyme. Le parenchyme présente de petits méats. Les faisceaux libéro-ligneux, disposés symétriquement, sont au nombre de dix-neuf dans une de mes préparations.

Rumex Acetosella L. (Pl. II, fig. 23.)

$L = 31^{mm}$; $l = 1^{mm}25$; $e = 1^{mm}$. — La minceur de ce pétiole explique la diminution considérable dans le nombre des faisceaux. On n'en trouve que cinq. Mais, comme chez les autres *Rumex*, son tissu conjonctif renferme des mâcles et l'on trouve du collenchyme dans les angles de son contour.

Rheum officinale H. Bn. (Pl. II, fig. 27.)

L = 330; $l = 13^{mm}$; $e = 11^{mm}$. — Poils subulés, unicellulaires de 1^{mm}. La caractéristique a une forme trapézoïdale. L'hypoderme est constitué par une couche épaisse de collenchyme. Le tissu conjonctif se compose de grandes cellules rondes ou elliptiques, méatiques. Les faisceaux libéro-ligneux sont nombreux : on en compte plus de trente. Les faisceaux périphériques sont disposés symétriquement. Dans l'arrangement des faisceaux internes, la symétrie est moins marquée, cependant elle est visible, surtout si l'on fait abstraction de quelques faisceaux minuscules.

On voit que ce pétiole présente de grandes analogies avec ceux des *R. obtusifolius* et *Lapathifolium*.

Les trois genres que nous venons d'étudier renfermant la moitié des espèces de Polygonacées, nous permettent d'indiquer les caractères du pétiole dans cette famille. Ce sont l'existence de mâcles d'oxalate de chaux, la présence du collenchyme, l'absence du sclérenchyme (Exc. *Rumex Lapathifolium*), le parallélisme des faisceaux périphériques, l'existence de faisceaux médians supérieurs. De plus, l'étude du genre ***Rumex*** nous apprend que la présence de faisceaux internes n'a pas la valeur d'un caractère générique, puisqu'ils manquent dans les ***R. Acetosa*** et ***Acetosella,*** existent au contraire dans les ***R. obtusifolius*** et ***Hydrolapathum.***

CHÉNOPODIACÉES.

Chenopodium murale L. (Pl. II, fig. 28.)

$L = 50^{mm}$; $l = 3^{mm}$; $e = 2^{mm}4$. — La caractéristique a une forme sinueuse. La membrane externe est moins épaisse en haut qu'en bas; son épaisseur varie de 6 à 10 μ. Le collenchyme forme six îlots situés dans les parties saillantes et au milieu du côté supérieur. Le tissu conjonctif se compose de cellules polygonales dont les méats sont nuls ou très petits; on y rencontre de grosses mâcles. Les faisceaux libéro-ligneux sont disposés en C

dans le centre du pétiole; on trouve également un ou deux faisceaux dans chacune des pointes latéro-supérieures de la caractéristique.

A l'initiale on ne trouve que sept faisceaux disposés en arc de cercle.

Chenopodium album L. (Pl. II, fig. 24.)

L = 35^{mm}; *l* = 1^{mm}2; *e* = 1^{mm}45. — La caractéristique du *C. album* est différente, au premier abord, de celle du *C. murale;* cependant il suffirait d'aplatir de bas en haut la caractéristique du premier pour obtenir celle du second. Le système libéro-ligneux a la même disposition, seulement ici les deux branches du C forment en se rejoignant une espèce d'ellipse.

Atriplex hortensis L.

L = 25^{mm}; *l* = 1^{mm}1; *e* = 1^{mm}3. — Par la forme de sa caractéristique et la disposition de ses faisceaux libéro-ligneux, l'*A. hortensis* rappelle beaucoup le *Chenopodium album*. Mais ce dernier manque de collenchyme, tandis que le premier en renferme.

Atriplex portulacoides L. (Pl. II, fig. 33, et pl. VI, fig. 66.)

L = 4^{mm}; *l* = 1^{mm}5; *e* = 1^{mm}3. — Caractéristique cordiforme. L'*Atriplex hortensis* est dépourvu de poils; l'*A. portulacoides* qui vit au bord de la mer, en possède qui présentent une particularité remarquable. Ces poils sont formés, dans leur jeune âge, d'une grosse cellule sphérique supportée par un petit pédicelle. Les grosses cellules terminales, en se développant, s'accolent, se compriment réciproquement, se soudent les unes aux autres et avec la cuticule; elles forment ainsi au-dessus de l'épiderme une membrane protectrice composée d'une ou plusieurs couches de cellules (1).

On trouve du collenchyme aux trois angles de la caractéris-

(1) Dans son *Anatomie comparée*, p. 66, M. de Bary décrit la curieuse disposition des poils de l'*Atriplex* (Obione) *portulacoides,* mais il ne parle pas de leur soudure.

tique. La système libéro-ligneux se compose de cinq faisceaux, dont trois sont groupés au centre du pétiole.

Beta maritima L. (Pl. II, fig. 31.)

$L = 80^{mm}$; $l = 2^{mm}3$; $e = 2^{mm}3$. — Poils nuls. La forme générale de la caractéristique est pentagonale. La membrane externe a une épaisseur de 6 μ. On trouve, à la périphérie, des îlots de collenchyme. Le système libéro-ligneux est représenté par sept faisceaux : cinq centraux, deux supérieurs. Comme dans le *Blitum bonus-Henricus*, les faisceaux *d* et *g* résultent chacun de la coalescence de deux autres. Dans cette espèce, les mâcles sont rares et très petites; généralement l'oxalate de chaux s'y montre sous forme de petits cristaux pulvérulents qui remplissent certaines cellules, comme on le voit constamment dans les Solanées.

Beta vulgaris (var. **speciosa**). (Pl. II, fig. 30.)

$L = 130^{mm}$; $l = 4^{mm}5$; $e = 4^{mm}5$. — Poils nuls. Comme dans l'espèce précédente, les cristaux sont pulvérulents. Il existe cinq faisceaux principaux et d'autres plus petits, notamment dans les pointes.

Blitum bonus Henricus Rchb. (Pl. II, fig. 29.)

$L = 140^{mm}$; $l = 3^{mm}4$; $e = 2^{mm}5$. — Poils nuls. La caractéristique est sinueuse. Les mâcles sont rares et petites. On trouve à l'initiale cinq faisceaux, G_2, G_1, M, D_1, D_2 (pl. I, fig. 22); les faisceaux G_2, D_2 émettent chacun un fascicule, puis s'unissent respectivement aux faisceaux G_1, D_1 pour former les faisceaux G, D. Cette réunion n'a pas toujours lieu, et l'on trouve alors sept faisceaux à la caractéristique (pl. II, fig. 29).

Basella rubra Lam. (Pl. II, fig. 34.)

$L = 18^{mm}$; $l = 4^{mm}$; $e = 5^{mm}$. — Poils : néant. La membrane externe a 7 μ d'épaisseur. On trouve une assise d'hypoderme aux lobes et à la partie inférieure de la caractéristique. Le tissu conjonctif est formé de grandes cellules méatiques à parois minces;

certaines renferment des mâcles ou des grains d'amidon. Le système libéro-ligneux est remarquable par son exiguïté : il se compose essentiellement d'un gros faisceau qui est visiblement formé de deux faisceaux accolés; au-dessus on trouve quatre à six faisceaux minuscules.

Boussingaultia baselloides Kunth. (Pl. II, fig. 35.)

$L = 5^{mm}$; $l = 3^{mm}$; $e = 3^{mm}5$. — Poils : néant. La caractéristique est une ellipse tronquée en dessus. Le tissu conjonctif, composé de cellules polygonales diminuant de grandeur du centre à la périphérie, contient quelques mâcles. Le collenchyme manque. Le système libéro-ligneux est disposé en arc de cercle.

Nous constatons dans cette plante comme dans la précédente la concentration du système libéro-ligneux en un faisceau central. Ce fait est conforme à la loi que j'ai établie à propos des Urticées. Car le *Basella* et le *Boussingaultia*, sans être des arbrisseaux, se distinguent cependant des autres plantes herbacées de la famille des Chénopodiacées par leur grande taille.

Les différents genres de Chénopodiacées que nous venons de passer en revue nous ont offert un certain nombre de caractères communs que nous allons énumérer : l'oxalate de chaux se présente d'ordinaire sous forme de mâcles (exc. *Beta*), le collenchyme existe, le sclérenchyme manque, les faisceaux libéro-ligneux sont parallèles et relativement grêles. On voit que tous ces caractères leur sont communs avec les Polygonées. Elles s'en distinguent néanmoins dans bien des cas par la tendance des faisceaux à se grouper, tout en restant distincts, et à se disposer en ellipse dans le centre du pétiole. *(Chenopodium, Atriplex.)*

AMARANTACÉES.

1° CELOSIÉES.

Celosia cristata L. (Pl. II, fig. 36.)

$L = 40^{mm}$; $l = 3^{mm}4$; $e = 2^{mm}6$. — Poils nuls. La caractéristique a la forme du trapèze isoscèle muni à son côté supérieur, le plus grand, de deux lobes latéraux. On y trouve du collen-

chyme en couche mince, interrompue. Le tissu conjonctif se compose de cellules polygonales à petits méats, avec cristaux pulvérulents. Le systéme libéro-ligneux est représenté par trois faisceaux principaux : un médiane inférieur et deux autres très rapprochés du premier, plus développés que lui et disposés suivant les branches d'un V. On trouve aussi dans chaque lobe deux ou trois petits faisceaux.

L'initiale ne présente guère de différences; seulement les petits faisceaux sont de chaque côté réunis en un seul.

2° AMARANTÉES.

Amarantus caudatus L. (Pl. II, fig. 37.)

$L = 90^{mm}$; $l = 3^{mm}$; $e = 3^{mm}6$. — Il existe à la périphérie une couche mince de collenchyme, interrompue seulement dans les lobes supérieurs. Le tissu conjonctif est constitué par des cellules rondes, méatiques, à parois minces; certaines de ces cellules, remplies de cristaux pulvérulents, apparaissent sur la préparation comme des taches noires. On trouve sept faisceaux libéro-ligneux disposés en cercle incomplet, et deux autres faisceaux placés dans les lobes supérieurs.

A l'initiale les faisceaux sont rangés en arc de cercle; cet arc se recourbe peu à peu et les faisceaux extrêmes donnent naissance vers 40^{mm} aux deux faisceaux placés dans les lobes.

3° GOMPHRÉNÉES.

Gomphrena globosa L. (Pl. II, fig. 38.)

$L = 10^{mm}$; $l = 2^{mm}3$; $e = 1^{mm}5$. Poils de $1^{mm}6$. — Comme dans les genres précédents, nous trouvons du collenchyme. Les cristaux ne se présentent pas à l'état pulvérulent, mais sous forme de mâcles. On compte trois faisceaux libéro-ligneux principaux, groupés au centre du pétiole, et trois ou quatre fascicules dans chaque lobe supérieur.

Les trois faisceaux centraux existent seuls à l'initiale.

Caractères communs. — La famille des Amarantacées comprend trois tribus; j'ai étudié trois genres pris dans chacune

d'elles. Il résulte de cette étude, que la structure du pétiole des Amarantacées est fort semblable à celle des Chénopodiacées. Dans les deux familles, le collenchyme existe, le sclérenchyme manque. Les cristaux se présentent tantôt sous forme de mâcles, tantôt à l'état pulvérulent, mais le premier cas est plus commun dans les Chénopodiacées, le second paraît plus fréquent dans les Amarantacées. Les faisceaux sont dépourvus d'anastomoses, ils restent distincts.

PHYTOLACCACÉES.

Phytolacca decandra L. (Pl. II, fig. 39.)

$L = 30^{mm}$; $l = 4^{mm}$; $e = 3^{mm}5$. — Poils nuls. La caractéristique montre une couche hypodermique continue de collenchyme. Le tissu conjonctif se compose de grandes cellules méatiques et contient des raphides; il est creusé à la partie supérieure d'une lacune. La partie principale du système libéro-ligneux se présente sous la forme d'un demi-cercle qui se décompose en trois faisceaux juxtaposés; on trouve en outre de chaque côté deux petits faisceaux supérieurs. Le sclérenchyme fait défaut.

L'initiale offre la même disposition; seulement on ne trouve qu'un petit faisceau de chaque côté, le second qui est une ramification supérieure du premier ne prend naissance que vers l'extrémité foliaire du pétiole.

On remarquera la ressemblance de ce pétiole avec celui des Amarantacées, et notamment avec celui de l'*Amarantus Caudatus*. Dans les deux cas le système libéro-ligneux est disposé en arc de cercle, mais les faisceaux sont distincts, écartés les uns des autres dans l'*A. caudatus*, plante herbacée; accolés et soudés, dans le *Phytolacca decandra,* plante frutescente.

CUPULIFÈRES.

1° QUERCINÉES.

Quercus pedunculata Ehrh. [1]. (Pl. II, fig. 42-44.)

$L = 8^{mm}$; $l = 1^{mm}55$; $e = 1^{mm}22$. — Poils nuls. Il existe un hypoderme collenchymateux, un parenchyme cortical constitué par des cellules polygonales renfermant de grosses mâcles. Le système libéro-ligneux forme une ellipse aplatie, entourée de fibres scléreuses; dans l'intérieur de cette ellipse, on trouve quelques cellules médullaires elliptiques avec grains d'amidon, et un faisceau dont le liber est placé en bas, le bois en haut et en contact avec celui de l'ellipse. Pour nous expliquer la position qu'occupe ce faisceau, il faut étudier le parcours des faisceaux depuis la base du pétiole.

A l'initiale, on constate que le système libéro-ligneux se compose d'une dizaine de faisceaux distincts, disposés en triangle. A mesure qu'on avance dans le pétiole, ces faisceaux se soudent les uns aux autres, de manière à former un anneau brisé dans sa partie médiane supérieure; plus loin, les extrémités de cet anneau brisé se recourbent en dedans, puis l'anneau se ferme, emprisonnant dans son intérieur les parties recourbées, qui s'en détachent et se soudent ensemble pour former l'anneau intra-médullaire de la caractéristique.

Chez les *Quercus suber* et *coccinea*, le parcours des faisceaux pétiolaires est identique à celui de l'espèce précédente, bien que la longueur de leurs pétioles soit très différente (4^{mm} pour le premier, 20^{mm} pour le second). Le pétiole du *Q. suber* possède des poils étoilés à parois épaisses.

Chez le *Q. Ilex* ($L = 10^{mm}$), les faisceaux libéro-ligneux forment à l'initiale trois groupes distincts, dessinant trois cercles, dont le médian est beaucoup plus gros que les latéraux. Ces derniers se rapprochent du médian et se fusionnent avec lui (1^{mm}),

---

[1] Frank, *Botanische Zeitung*, 1864, p. 380 (note).

comme je l'indiquerai avec plus de détails à propos du *Salix fragilis-alba*. L'anneau unique ainsi formé n'émet pas de faisceau intra-médullaire, comme dans les *Q. pedunculata* et *suber*.

On trouve sur le pétiole du *Q. Ilex* des poils étoilés à parois épaisses.

Il est à remarquer que la couche ligneuse est relativement plus épaisse et plus dense dans les *Q. suber* et *Ilex*, qui ont des feuilles persistantes, que dans le *Q. pedunculata*, dont les feuilles sont caduques.

Fagus sylvatica L. (Pl. II, fig. 65-67.)

L = 8^{mm}; *l* = 1^{mm}6; *e* = 1^{mm}25. — A la base du pétiole, le système libéro-ligneux se compose de plusieurs petits faisceaux, qui en se soudant (0^{mm}5) forment un anneau triangulaire dans l'intérieur duquel le côté supérieur émet une boucle (pl. II, fig. 65, *b*). Cette boucle en s'inclinant à droite forme une seconde boucle (pl. II, fig. 55, *a*); celle-ci se ferme complètement, se détache et devient un anneau qui se dispose symétriquement par rapport au plan médian du pétiole (pl. II, fig. 67, *a*).

Le pétiole du *Fagus caroliniana* présente la même disposition du système libéro-ligneux.

Castanea vesca Gærtn. (Pl. II, fig. 41.)

L = 15^{mm}; *l* = 2^{mm}2; *e* = 2^{mm}. — Poils nuls. Le système libéro-ligneux est disposé comme dans le *Quercus pedunculata*; mais ici le faisceau intra-médullaire est partagé en deux moitiés, de plus, il se détache de chaque bord supéro-latéral de l'anneau deux petits faisceaux.

2° CORYLÉES.

Corylus Avellana L. (Pl. II, fig. 50-56.)

L = 20^{mm}; *l* = 1^{mm}9; *e* = 2^{mm}. — Poils subulés de 45 μ, à parois épaisses; poils glanduleux brièvement pedicellés; poils plurisériés. Le système libéro-ligneux débute par trois faisceaux disposés en triangle (pl. II, fig. 50). Les deux supérieurs

émettent chacun un fascicule, l'inférieur en émet deux qui, s'unissant avec les précédents, forment deux petits faisceaux médians supérieurs. Le faisceau médian de gauche reste simple, mais celui de droite se dédouble immédiatement en deux faisceaux superposés; l'inférieur est concentrique à liber interne (pl. II, fig. 52). Plus loin, le faisceau concentrique s'agrandit en formant un petit anneau qui finit par se souder au grand (7^{mm}); il n'y a plus alors qu'un anneau unique qui présente deux boucles: une interne, l'autre externe et latérale *a* (pl. II, fig. 53). La première diminue et s'efface, la seconde au contraire augmente, se détache de l'anneau principal et forme au-dessus de lui un anneau (pl. II, fig. 54, *a*). L'anneau principal ne tarde pas à émettre deux nouvelles boucles supéro-latérales (fig. 55, *b*, *b'*). En même temps l'anneau supérieur s'ouvre en haut.

La caractéristique du *Corylus tubulosa* présente la même disposition du système libéro-ligneux que la précédente; on y trouve un anneau inférieur principal, flanqué de deux petits cercles, et surmonté d'un arc de cercle; mais ici cet arc de cercle est très ouvert et fragmenté en trois parties.

Carpinus Betulus L. (Pl. II, fig. 58-60.)

$L = 10^{mm}$; $l = 1^{mm}$; $e = 0^{mm}95$. — Poils de deux sortes : 1° subulés, unicellulaires de 125 μ, à parois épaisses; 2° glanduleux.

On trouve à l'initiale cinq faisceaux libéro-ligneux (pl. II, fig. 58). Les deux faisceaux supérieurs se partagent en deux (fig. 59) : les deux moitiés inférieures, en s'unissant aux trois faisceaux primitifs inférieurs, forment un anneau; tandis que les moitiés supérieures se soudent en croissant. Le croissant et l'anneau sont en contact par leur liber.

Ostrya virginiana. (Pl. II, fig. 61-63.)

$L = 7^{mm}$. — Le système libéro-ligneux débute par trois faisceaux : les deux latéraux s'accroissent beaucoup et se recourbent en demi-cercles, dont les extrémités inférieures se rapprochent

du faisceau médian, tandis que les extrémités supérieures s'accolent l'une à l'autre; l'ensemble prend alors la forme d'un anneau (1^{mm}) (pl. II, fig. 61). Plus loin, les extrémités supérieures des faisceaux latéraux s'incurvent en dedans, se fusionnent et se détachent de l'anneau, pour former dans son intérieur un faisceau, dont le bois est supérieur (2^{mm}) (fig. 62). Puis l'anneau se fend à sa partie supérieure, ses extrémités s'allongent en dehors et émettent deux petits faisceaux concentriques à bois interne; en même temps la forme générale de l'anneau se modifie; finalement, à la caractéristique, le système libéro-ligneux dessine à peu près une lyre (fig. 63).

Ostryopsis davidiana. (Pl. II, fig. 64.)

$L = 8^{mm}$. — Le système libéro-ligneux du pétiole offre dans sa longueur les mêmes dispositions successives que chez l'*Ostrya virginiana;* seulement il ne se forme pas de faisceau central et il se détache des angles de la portion principale deux petits faisceaux.

3° BÉTULÉES.

Alnus glutinosa Gœrtner. (Pl. II, fig. 47-49.)

$L = 25^{mm}$; $l = 1^{mm}5$; $e = 2^{mm}7$. — Le système libéro-ligneux débute par cinq faisceaux, très rapprochés les uns des autres (pl. II, fig. 45), ils se soudent et forment un U (7^{mm}) (pl. II, fig. 46). De l'extrémité de chaque branche se détache bientôt un faisceau qui se porte à la partie supérieure (pl. II, fig. 48); en même temps les branches s'incurvent et l'U se change en O. Le rapprochement des branches se continuant encore, leurs extrémités se retournent en dehors (20^{mm}) et forment un croissant qui se détache complètement de l'O (pl. II, fig. 49).

La caractéristique de l'*Alnus viridis* ne diffère pas essentiellement de celle de l'*A. glutinosa*.

Betula papyracea. (Pl. II, fig. 57.)

$L = 26^{mm}$; $l = 1^{mm}48$; $e = 1^{mm}3$. — Poils subulés de 800 μ, à parois épaisses. A la base du pétiole, on trouve trois

faisceaux libéro-ligneux, qui se soudent en U. Les extrémités de ces branches émettent deux faisceaux. On voit que la caractéristique du *Betula papyracea* reproduit un stade intermédiaire (15^{mm}) de l'*Alnus glutinosa.*

Dans le *Betula alba,* la disposition du système libéro-ligneux est la même que dans le précédent; à la caractéristique il forme un V au lieu d'un U.

Caractères communs. — Le pétiole des Cupulifères [1] renferme du sclérenchyme et des mâcles d'oxalate de chaux. Grâce aux particularités que présente dans cet organe le trajet des faisceaux libéro-ligneux, il suffit d'un pétiole pour reconnaître, non seulement la famille, mais encore le genre d'une Cupulifère.

SALICINÉES.

Salix fragilis-alba Wimm. (Pl. II, fig. 76-78.)

$L = 12^{mm}$; $l = 1^{mm}8$; $e = 1^{mm}85$. — Poils nuls. La caractéristique est à peu près semi-circulaire. La membrane externe est complètement colorée par le violet d'aniline. Les cellules épidermiques sont petites; elles reposent sur un hypoderme collenchymateux. Le parenchyme cortical se compose de cellules rondes sans méats à la partie inférieure du pétiole; à la partie supérieure, au contraire, il existe quelques méats et même des canaux aérifères. Le système libéro-ligneux a la forme d'un anneau aplati de haut en bas, enserrant des cellules médullaires rondes sans méats. On aperçoit de grosses mâcles dans les parenchymes cortical et médullaire. Il n'y a pas de sclérenchyme.

Le système libéro-ligneux débute par trois faisceaux (pl. II, fig. 76) qui se courbent de manière à former trois anneaux distincts (2^{mm}) (pl. II, fig. 77). Les deux anneaux latéraux se rapprochent de l'anneau central. Puis tous les trois s'ouvrent par des fentes latérales (3^{mm}), comme l'indique la figure 78 (pl. II) et se soudent en un seul anneau (pl. II, fig. 79).

Les *Salix fragilis* (pl. II, fig. 74), *cinerea* (pl. II, fig. 75),

---

[1] J'ai étudié tous les genres de cette famille, sauf le genre *Castanopsis*.

alba présentent la même disposition du système libéro-ligneux. Avant d'arriver à sa forme caractéristique, il passe par les mêmes phases. Mais les pétioles de ces espèces étant plus courts que celui du *S. fragilis-alba* (le pétiole du *S. alba* notamment n'a que 1^{mm}), les divers changements, qui se produisent dans la disposition des faisceaux, sont plus difficiles à distinguer, et exigent pour être saisis un peu plus d'attention.

Populus alba L. (Pl. III, fig. 1-7.)

$L = 40^{mm}$; $l = 1^{mm}3$; $e = 2^{mm}7$. — Poils unicellulaires atteignant 700 μ. La caractéristique est ovale, son pôle obtus est inférieur. L'hypoderme comprend cinq à six assises de cellules à parois très épaisses, sans méats. Le parenchyme cortical se compose de cellules à parois plus minces, peu méatiques. Le système libéro-ligneux forme trois anneaux superposés (le plus petit en haut), qui entourent de petites cellules médullaires. On trouve des mâcles dans le parenchyme cortical et dans la moelle. Comme les *Salix*, les *Populus* manquent de sclérenchyme, au moins à la caractéristique.

Étudions maintenant le parcours des faisceaux. Cette étude nous sera facilitée par la connaissance du système libéro-ligneux des *Salix*. Comme dans ce genre l'initiale du *Populus alba* renferme trois faisceaux G, M, D (pl. III, fig. 1), qui en s'incurvant forment des anneaux plus ou moins complets. Les deux anneaux latéraux se rapprochent du médian, mais, avant de se fusionner, les trois anneaux se divisent chacun en deux autres (pl. III, fig. 3): le faisceau G donne G_1 et G_2; le faisceau M donne M_1 et M_2; les faisceaux D_1 et D_2 proviennent de D (2^{mm}); de sorte qu'après cette segmentation (3^{mm}), on voit six anneaux, rangés sur deux lignes : trois inférieurs G_1, M_1, D_1, et trois supérieurs G_2, M_2, D_2 (pl. III, fig. 4). Occupons-nous d'abord des premiers seulement : les deux latéraux G_1, D_1 s'approchent de plus en plus du médian M_1, se soudent avec lui (8^{mm}) et forment ainsi l'ellipse inférieure A de la caractéristique, qui correspond à l'ellipse unique des *Salix* (pl. III, fig. 7).

Revenons maintenant aux trois petits anneaux supérieurs G_2, M_2, D_2. Le faisceau M_2 ne tarde pas (4^{mm}) (pl. III, fig. 5) à se diviser en deux parties, M'_2, M''_2, qui se soudent respectivement aux faisceaux G_2 et D_2, de manière à former deux faisceaux annulaires D_3 et G_3. A 12^{mm}, nous voyons ces deux faisceaux D_3 et G_3, se segmenter en deux moitiés, l'une inférieure, l'autre supérieure (pl. III, fig. 6). Puis les deux moitiés inférieures se soudent entre elles pour former l'ellipse moyenne B de la caractéristique; de même les deux moitiés supérieures, pour constituer l'ellipse supérieure C de la caractéristique (pl. III, fig. 7).

Le pétiole du *P. fastigiata* ressemble beaucoup au précédent, cependant la forme de la caractéristique est un peu différente. Le système libéro-ligneux y est groupé en trois ellipses, comme chez le *P. alba;* on y trouve, en outre, deux petits faisceaux supérieurs. Du reste, le mode de formation de ces ellipses est le même dans les deux espèces; quant aux deux petits faisceaux, ils se détachent de l'ellipse supérieure.

La caractéristique du *P. nivea* présente trois anneaux elliptiques comme celle du *P. alba.*

Le pétiole du *P. angulata* est relativement très long (100^{mm}); sa caractéristique présente un quatrième anneau qui provient de l'anneau placé au-dessous de lui.

A la caractéristique du *P. ontariensis,* on trouve un anneau inférieur surmonté de quatre petits anneaux placés symétriquement de chaque côté. Cette disposition reproduit un stade intermédiaire du *P. alba,* à peu près celui qui est figuré (pl. III, fig. 6). Mais dans cette dernière espèce, comme nous l'avons vu, les anneaux situés à la même hauteur se soudent ensemble; ils restent distincts, au contraire, dans le *P. ontariensis.*

Caractères communs. — La famille des Salicinées ne renfermant que les deux genres *Salix* et *Populus,* nous pouvons indiquer les caractères du pétiole dans ce groupe. Il présente des mâcles, un hypoderme collenchymateux. Le sclérenchyme fait défaut, au moins à la caractéristique. Le système libéro-ligneux est disposé à la caractéristique, suivant des anneaux (un dans le

genre *Salix*, trois ou quatre dans le genre *Populus*). Le parcours des faisceaux est tout à fait remarquable : celui des *Populus* est particulier à ce genre. Celui des *Salix* se retrouve, en partie, dans le genre *Juglans* que nous allons étudier maintenant.

JUGLANDÉES.

Juglans regia L. (Pl. II, fig. 68.)

L = 80^{mm}; $l = 3^{mm}$; $e = 4^{mm}$. — Poils rares. L'hypoderme est formé de cellules à parois épaisses, sans méats. Les cellules du parenchyme cortical sont petites, rondes ou elliptiques, dépourvues de méats; celles du parenchyme médullaire sont plus grandes, un peu méatiques. Ces deux tissus, ainsi que le liber, renferment des mâcles. Le système libéro-ligneux se compose d'un anneau triangulaire surmonté d'une rangée de faisceaux à liber supérieur.

L'anneau a le même mode de formation que celui des *Salix*, c'est-à-dire qu'il résulte de la coalescence de trois petits anneaux. Dès que cet anneau est constitué, on voit se détacher de son côté supérieur quelques petits faisceaux, qui se placent au-dessus de lui, le bois en bas, et qui sont l'origine de la rangée que l'on trouve à la caractéristique.

On voit que le pétiole du *Juglans regia* rappelle beaucoup celui des *Salix*. Il en diffère par la présence des faisceaux superposés à l'anneau, et par l'existence de fibres scléreuses accolées avec le liber.

Carya juglandiformis. (Pl. II, fig. 69.)

L = 60^{mm}. — A la base du pétiole, le système libéro-ligneux forme un anneau triangulaire, dont un des côtés est supérieur. De ce côté se détachent des faisceaux qui se disposent au-dessus de lui, suivant une ligne parallèle, de sorte qu'à 23^{mm}, par exemple, la disposition du système libéro-ligneux est sensiblement la même qu'à la caractéristique du *Juglans regia*. Puis la ligne supérieure se courbe en arc, dont les extrémités émettent des fascicules qui en dessinent la corde.

Carya alba. (Pl. II, fig. 70.)

L = 145^{mm}. — Le système libero-ligneux du pétiole passe par les mêmes phases que dans le précédent; à 125^{mm}, par exemple, sa disposition est la même qu'à la caractéristique du *C. juglandiformis,* mais elle n'est pas définitive, et l'on voit plus loin se détacher de chaque côté de l'anneau supérieur deux petits anneaux.

Pterocarya fraxinifolia. (Pl. II, fig. 71-72.)

L = 60^{mm}. — On trouve à la caractéristique un anneau libéroligneux principal, triangulaire, surmonté de deux petits anneaux circulaires (pl. II, fig. 72); ces deux anneaux, rapprochés du plan de symétrie du pétiole, proviennent de deux petits faisceaux qui se détachent du milieu du côté supérieur de l'anneau triangulaire (pl. II, fig. 71). La position de ces anneaux n'est pas ordinaire; généralement ils sont tout à fait latéraux, comme on le voit dans les *Fraxinus,* les *Corylus,* et beaucoup de Légumineuses arborescentes.

Dans le *Pterocarya caucasica* (L = 27^{mm}), le système libéroligneux forme à la base un anneau triangulaire; à 9^{mm}, cet anneau est surmonté, comme dans le *P. fraxinifolia*, de deux petits anneaux qui, plus loin, se fondent en un seul (pl. II, fig. 73).

Caractères communs. — Les Juglandées sont immédiatement reconnaissables à la disposition du système libéro-ligneux de leur caractéristique. Les divers parcours des faisceaux pétiolaires sont aussi particuliers à cette famille; on a vu que ces parcours peuvent se rattacher les uns aux autres : en résumé, on trouve toujours à la base du pétiole un anneau triangulaire dont le côté supérieur émet plus loin des faisceaux qui se disposent soit en ligne, soit en anneaux, suivant les genres et les espèces.

Je signalerai encore, au nombre des caractères communs, l'existence de fibres scléreuses et de mâcles d'oxalate de chaux.

Platanus occidentalis L. (Pl. III, fig. 13-21.)

L = 42^{mm}; l = 1^{mm}9; e = 2^{mm}5. Poils ramifiés. La caractéristique est un ovale, à pôle obtus inférieur, tronqué à son pôle

aigu. L'hypoderme est peu différencié. Les cellules corticales et médullaires sont rondes ou légèrement polygonales et renferment des mâcles et des cristaux isolés. Le système libéro-ligneux est disposé en trois groupes superposés : l'inférieur a la forme d'un C à branches recourbées en dedans; les deux autres dessinent à peu près deux anneaux soudés ensemble. Le liber est doublé de fibres scléreuses.

L'initiale est annulaire; le vide intérieur étant occupé dans la plante par le bourgeon; elle est asymétrique (pl. III, fig. 13). On y trouve trois faisceaux médians M, deux faisceaux à gauche G_1, G_2, et trois faisceaux à droite D_1, D_2, D_3. Chacun de ces faisceaux est composé de quatre à cinq fascicules disposés en cercle. On voit que les faisceaux médians M qui, à la caractéristique, sont inférieurs, sont latéraux à l'initiale; cela tient à la torsion du pétiole. A 5^{mm} (fig. 14), la disposition est la même, sauf l'apparition de fascicules *f* issus des faisceaux M. A 7^{mm} (fig. 15), le vide central n'existe plus, les fascicules *f* sont venus se placer entre les faisceaux G_2 et D_3; les faisceaux M se sont disposés en arc de cercle; les faisceaux G_1, D_1 et D_2 se fendent chacun en deux parties, l'une externe, l'autre interne : les parties externes prolongent à gauche et à droite l'arc des faisceaux M, les parties internes forment les extrémités recourbées de cet arc; l'ensemble représente un C. Quant aux faisceaux D_2, G_2 et *f*, ils restent en dehors de ce mouvement de concentration. A 9^{mm} (fig. 16), cette disposition s'accuse davantage. A 15^{mm} (fig. 17), le faisceau G_2 se rapproche de la boucle droite du C; celle-ci se fend en deux parties entre lesquelles vient s'intercaler (27^{mm}) le faisceau G_2 qui a pris la forme d'un demi-cercle (fig. 18). A 35^{mm} (fig. 19), le faisceau G_2 s'isole de nouveau et devient annulaire, tandis que les faisceaux inférieurs forment de nouveau un C parfaitement symétrique. A 38^{mm} (fig. 20), on constate que le faisceau D_3 est venu se placer entre les fascicules qui forment l'anneau G_2. Finalement, à 42^{mm}, le faisceau *f* se dissocie en fascicules, disposés en arc de cercle et s'unit à l'anneau G_2, D_3 qui s'est ouvert en haut; de sorte que l'ensemble figure à peu près un 8 écrasé.

En résumé, nous voyons que les faisceaux disposés en C à la

partie inférieure de la caractéristique, proviennent de la soudure des faisceaux initiaux G_1, M, D_1, D_2; ceux-ci éprouvent une torsion autour de l'axe du pétiole, le faisceau M notamment tourne environ de 90° vers le bas du pétiole; latéral à l'initiale, il devient inférieur à la caractéristique. La boucle inférieure du 8 est composée presque exclusivement par les faisceaux G_2 et D_2, tandis que sa boucle supérieure est formée par les fascicules *f* issus d'abord de M, et qui ont décrit à peu près un quart de cercle, vers le haut du pétiole.

Par la complication et la singularité du trajet de leurs faisceaux pétiolaires, les Platanées se distinguent absolument des autres familles végétales.

DIALYPÉTALES.

RENONCULACÉES [1].

1° CLÉMATIDÉES.

Clematis vitalba L. (Pl. III, fig. 22.)

$L = 33^{mm}$; $l = 5^{mm}$; $e = 4^{mm}7$. — La caractéristique est pentagonale; son côté supérieur est plus ou moins concave. La membrane externe est épaisse (10 μ); elle est recouverte de quelques poils claviformes, unicellulaires de 80 μ. Au-dessous de l'épiderme on trouve trois ou quatre assises de parenchyme, dont les cellules sont méatiques, sauf celles de l'assise externe. Le parenchyme cortical est séparé des faisceaux libéro-ligneux par un péricycle de sclérenchyme, fibreux en regard des faisceaux, parenchymateux dans leurs intervalles. Les faisceaux sont au nombre de six disposés aux cinq sommets, et au milieu du côté supérieur du pentagone. Leur coupe transversale a la forme d'une ellipse ou d'un ovale dont le pôle aigu est tourné vers l'intérieur du pétiole. Dans la plupart des plantes, la surface de séparation du liber et du bois est convexe du côté du liber, dans le *C. vitalba* elle est concave. Il en est de même dans les autres Renonculacées.

En dedans des faisceaux on trouve des cellules médullaires, arrondies, à parois minces qui passent insensiblement au parenchyme scléreux du péricycle.

Le *Clematis vitalba*, comme les autres plantes de la famille des Renonculacées, à l'exception des *Pæonia*, ne renferme pas de cristaux dans son pétiole.

Le système libéro-ligneux débute par cinq faisceaux disposés aux

---

(1) Julien Vesque, *De l'Anatomie des tissus...., etc. — Nouvelles Archives du Muséum*, 1881. — Paul Marié, *Recherches sur la structure des Renonculacées*, 1884.

cinq angles du pétiole. A 2^{mm} de l'initiale on voit les deux faisceaux supérieurs donner naissance à deux autres faisceaux qui se rapprochent l'un de l'autre et sont complètement soudés vers $3^{mm}5$. A partir de là, il n'y a plus de changement dans la disposition des faisceaux. Parmi les Renonculacées, je n'ai trouvé une semblable formation d'un faisceau médian supérieur que dans le *Delphinium Staphysagria,* on la rencontre au contraire chez toutes les Géraniacées et Malvacées. Mais dans ces deux dernières familles, le pétiole renferme des mâcles qui empêchent de le confondre avec celui d'une Renonculacée.

D'après M. Marié, on trouve six faisceaux dans un certain nombre d'espèces de Clématites; dans d'autres espèces il en existe davantage : par exemple dans le *C. recta* dont cet auteur donne un dessin. Mais il est possible que, même dans ce cas, en faisant abstraction des faisceaux surnuméraires, on retrouve cinq faisceaux initiaux présentant la même disposition et les mêmes ramifications que dans le *C. vitalba.*

2° ANÉMONÉES.

Thalictrum majus Jacq.

$L = 300^{mm}$; $l = 3^{mm}$; $e = 1^{mm}5$. — La caractéristique a une forme pentagonale. Chaque sommet se prolonge en pointe. Les cellules épidermiques quadrangulaires sont dépourvues de poils. Le parenchyme cortical est formé par trois ou quatre assises de cellules rondes, méatiques; il entoure un péricycle de sclérenchyme fibreux contre lequel s'appliquent la plupart des faisceaux libéro-ligneux. Ceux-ci sont nombreux; on en compte trente-deux sur une de mes préparations. Ils sont disposés symétriquement, sauf un seul. Au centre du pétiole, on trouve une moelle volumineuse formée de cellules rondes ou ovales, méatiques.

A l'initiale, qui a la forme d'une bande mince, les faisceaux sont disposés sur une seule ligne (pl. III, fig. 23); puis à mesure que la gaine s'épaissit, les faisceaux initiaux qui restent inférieurs émettent des branches vers la partie supérieure; de sorte que finalement les faisceaux sont disposés suivant une courbe fermée.

Thalictrum speciosum H. P. (Pl. III, fig. 24.)

$L = 145^{mm}$; $l = 5^{mm}$; $e = 4^{mm}7$. — La caractéristique est pentagonale comme dans l'espèce précédente; mais ici le côté supérieur brisé forme un angle saillant. Le péricycle de sclérenchyme est fibreux au contact des faisceaux, parenchymateux dans leurs intervalles. Les faisceaux libéro-ligneux sont plus nombreux et disposés moins symétriquement que dans le *Th. majus*. Dans une de mes préparations, on en compte quarante-quatre de grandeur inégale. La moelle renferme une lacune peu développée.

Ces deux exemples suffisent pour faire connaître la structure générale du pétiole dans le genre *Thalictrum*. Ce qui le caractérise, c'est la forme pentagonale de la coupe terminale, la multiplicité des faisceaux libéro-ligneux, la présence d'un péricycle scléreux. Sa caractéristique ressemble à celle des *Clematis*, bien que les faisceaux soient moins nombreux dans ce dernier genre.

Anemone sylvestris L. (Pl. III, fig. 25.)

$l = 1^{mm}58$; $e = 1^{mm}8$. — La caractéristique est cordiforme. L'épiderme possède une membrane externe épaisse (10 μ), recouverte de poils unicellulaires. Le tissu conjonctif se compose de cellules rondes, méatiques, elles ont des parois épaisses en dehors des faisceaux libéro-ligneux, des parois plus minces dans la partie centrale qui renferme une lacune. Il existe six faisceaux principaux, dont quatre latéraux et deux médians (inférieur et supérieur), et six faisceaux intercalaires plus petits. Quelques-uns de ces faisceaux possèdent du sclérenchyme.

Adonis autumnalis L. (Pl. I, fig. 11.)

$L = 12^{mm}$; $l = 1^{mm}25$; $e = 1^{mm}22$. — L'épiderme est dépourvu de poils, sa membrane externe a une épaisseur de 6 μ. Le tissu conjonctif se compose de cellules rondes séparées par de grands méats. Il y a cinq faisceaux libéro-ligneux dépourvus de sclérenchyme.

A l'initiale (pl. I, fig. 11) il n'existe que trois faisceaux G, M, D.

Les faisceaux G, D émettent chacun un faisceau *d*, *g*; du faisceau M partent deux faisceaux *d'*, *g'*, qui d'ordinaire se soudent respectivement aux faisceaux D, G, en avant de la caractéristique; plus rarement ils restent libres, et la caractéristique présente sept faisceaux.

3° RENONCULÉES.

Ranunculus Baudotii Godr. (Pl. I, fig. 12.)

Ce *Ranunculus* aquatique possède deux sortes de feuilles, les unes immergées, les autres émergées. Dans le premier cas, le limbe est lacinié, le pétiole court (2 + 2), la caractéristique réniforme; dans le second cas, le limbe est entier, le pétiole plus long (3 + 45), la caractéristique cordiforme.

Dans les deux cas, la structure du pétiole est la même : l'épiderme est glabre; le tissu conjonctif se compose de cellules rondes à grands méats; le système libéro-ligneux est formé de trois faisceaux entourés chacun d'un endoderme sclérifié.

On retrouve ces trois faisceaux dans toute la longueur du pétiole. Il existe de plus dans la gaine deux petits faisceaux anastomotiques.

Ranunculus flammula L. (Pl. III, fig. 36.)

$L = 55^{mm}$; $l = 2^{mm}$; $e = 2^{mm}$. — Il s'agit ici d'une feuille radicale, les supérieurs étant sessiles. L'épiderme glabre a une membrane externe épaisse de 5 μ. Le tissu conjonctif est formé de cellules ovales laissant entre elles de grands méats. Le système libéro-ligneux se compose de neuf faisceaux, dont quelques-uns possèdent un peu de sclérenchyme, principalement à leur pôle libérien.

Ranunculus millefoliatus Vahl. (Pl. III, fig. 30.)

$l = 1^{mm}9$, $e = 1^{mm}2$. — La caractéristique est réniforme, anguleuse. La membrane externe a une épaisseur de 9 μ. Le tissu conjonctif méatique renferme cinq faisceaux libéro-ligneux dépourvus de sclérenchyme.

Ranunculus parviflorus L. (Pl. III, fig. 31.)

$L = 40^{mm}$; $l = 1^{mm}$; $e = 0^{mm}7$. — La caractéristique est réniforme. Le tissu conjonctif présente deux lacunes (*l, l*); il renferme cinq faisceaux dépourvus de sclérenchyme.

Ranunculus Philonotis D.C. (Pl. III, fig. 32.)

$L = 50^{mm}$; $l = 1^{mm}65$; $e = 1^{mm}25$. — Caractéristique réniforme. La membrane externe, épaisse de 10 μ, est glabre. Le tissu conjonctif méatique présente deux lacunes (*l, l*). Le système libéro-ligneux se compose de sept faisceaux.

A l'initiale, on ne trouve que cinq faisceaux M, D_1, D_2, G_1, G_2: le médian M donne naissance vers 8^{mm} à deux fascicules, qui s'anastomosent avec les faisceaux D_1 et G_1; les faisceaux D_2 et G_2 émettent, vers 15^{mm}, les deux faisceaux D_3 et G_3.

Ranunculus trichophyllus Chaix. (Pl. III, fig. 33.)

$L = 35^{mm}$; $l = 2^{mm}$; $e = 1^{mm}$. — Caractéristique réniforme. La membrane externe est mince (3 μ). Le tissu conjonctif est creusé de grands méats; il renferme de nombreux grains d'amidon, et enveloppe trois faisceaux libéro-ligneux accompagnés d'un peu de sclérenchyme.

Ranunculus velutinus Ten. (Pl. III, fig. 29.)

$l = 2^{mm}5$; $e = 1^{mm}5$. — Caractéristique réniforme. La membrane externe épaisse (8 μ) présente des poils unicellulaires de $1^{mm}3$.

Ranunculus calthæfolius Rchb. (Pl. III, fig. 28.)

$l = 4^{mm}$; $e = 1^{mm}5$. — Caractéristique réniforme, glabre. Le tissu conjonctif méatique offre deux grandes lacunes (*l, l*) placées symétriquement. Il renferme trois faisceaux principaux et six petits.

A l'initiale, on ne trouve que les cinq faisceaux inférieurs de la caractéristique.

Ranunculus ficaria D. C. (Pl. I, fig. 18, et pl. III, fig. 27.)

L = 100^{mm}; l = 2^{mm}7; e = 1^{mm}5. — Caractéristique réniforme. La membrane externe (13 μ) est glabre. Le tissu conjonctif méatique est creusé de deux grandes lacunes placées symétriquement. Il existe sept faisceaux libéro-ligneux dépourvus de sclérenchyme.

On ne trouve que trois faisceaux à l'initiale.

J'ai étudié en détail ce genre *Ranunculus*, pour montrer qu'en dépit des changements de milieu, la structure générale du pétiole varie peu dans les différentes espèces. On aurait pu croire, en effet, que les changements d'habitat, qui ont une si grande influence sur la forme de la feuille, retentissaient sur l'organisation du pétiole. Il n'en est rien. Dans tous les *Ranunculus*, aussi bien dans le *R. ficaria* à feuilles entières cordiformes que dans le *R. trichophyllus* à feuilles laciniées, la caractéristique est réniforme (sauf dans le *R. Flammula*) ; les faisceaux libéro-ligneux présentent la même forme et la même disposition ; le collenchyme est nul ; le sclérenchyme très rare. Le tissu conjonctif est lâche et présente parfois des lacunes, dans les Renoncules terrestres *(R. velutinus)* comme dans les Renoncules aquatiques *(R. Philonotis)*.

4° HELLÉBORÉES.

Caltha palustris L. (Pl. III, fig. 37.)

Longueur du pétiole à partir de la gaine : 230^{mm}; l = 3^{mm}1; e = 3^{mm}. — La caractéristique a une forme particulière. La membrane externe a une épaisseur de 6 μ. Le tissu conjonctif est formé de cellules rondes méatiques, à parois épaisses; il présente à son centre une grande lacune l. Le système libéro-ligneux se compose d'une vingtaine de faisceaux offrant une disposition symétrique, si l'on en néglige deux ou trois petits.

Les faisceaux présentent à l'initiale un arrangement analogue à celui de la caractéristique.

D'après M. Marié, le pétiole du *C. dionæfolia* ne renferme que trois faisceaux.

Trollius europæus L. (Pl. I, fig. 8.)

$L = 28^{mm} + 140^{mm}$; $l = 2^{mm}1$; $e = 1^{mm}9$. — Caractéristique cordiforme. Membrane externe (9 μ) glabre. Le tissu conjonctif est composé de cellules méatiques, généralement rondes et à parois épaisses. Le nombre des faisceaux est variable à cause des anastomoses et des ramifications qui se produisent. Le parcours des faisceaux est assez compliqué : on remarque dans le schéma que j'en donne (pl. I, fig. 8) que leur disposition est symétrique à l'initiale, à la pseudo-initiale (a, a), à la caractéristique, et asymétrique dans l'intervalle.

Helleborus viridis L. (Pl. III, fig. 40.)

$L = 110^{mm}$; $l = 4^{mm}$; $e = 4^{mm}$. — La forme générale de la caractéristique est quadrilatère, arrondie. La membrane externe est épaisse (10 μ), dépourvue de poils. Le tissu conjonctif, formé de cellules rondes, méatiques, présente des lacunes entre les faisceaux. Ceux-ci sont au nombre de neuf à l'initiale et dans la plus grande partie du pétiole, mais en approchant de la caractéristique ils se segmentent d'une façon irrégulière, et l'on en trouve alors jusqu'à dix-huit. Ces faisceaux sont doublés à leur pôle externe d'un arc de sclérenchyme fibreux.

Helleborus niger L. (Pl. III, fig. 39.)

$L = 65^{mm}$; $l = 3^{mm}7$; $e = 3^{mm}5$. — Le pétiole de cette espèce a été décrit par M. Marié [1]; je me bornerai à indiquer qu'il diffère du précédent par la forme de la caractéristique qui est à peu près ronde, et par la plus grande compacité de son tissu conjonctif.

Nigella damascena L. (Pl. I, fig. 4, et pl. III, fig. 41.)

$L = 65^{mm}$; $l = 2^{mm}1$; $e = 1^{mm}9$. — La caractéristique est cordiforme anguleuse. Les cellules épidermiques sont allongées

---

[1] *Loc. cit.*, p. 96.

tangentiellement, leur membrane externe est épaisse (10 μ), dépourvue de poil. Le parenchyme cortical se compose de trois assises de cellules rondes, méatiques, à parois épaisses. Il existe quelques cellules collenchymateuses à l'angle inférieur. Le centre du pétiole est occupé par une grande lacune *l*. Les faisceaux libéro-ligneux sont au nombre de sept; ils sont pourvus de sclérenchyme à leur pôle externe.

L'initiale ne possède que cinq faisceaux. La figure 4 (pl. I) explique la formation des faisceaux intercalaires *d* et *g*.

Aquilegia Sp. (Pl. III, fig. 46.)

$L = 30^{mm} + 205^{mm}$; $l = 2^{mm}6$; $e = 3^{mm}$. — La caractéristique est à peu près circulaire. Les cellules épidermiques quadrangulaires possèdent une membrane externe épaisse (10 μ), pourvue de poils unicellulaires de $0^{mm}5$; leur paroi profonde est également épaisse, tandis que les cloisons radiales sont minces. Le parenchyme cortical est formé par quatre ou six assises de cellules méatiques; les rayons médullaires sont en partie sclérifiés; les cellules de la moelle sont plus grandes et laissent au centre une grande lacune. Les faisceaux libéro-ligneux disposés en cercle sont répartis symétriquement de chaque côté : dix à droite, dix à gauche, un médian supérieur, un médian inférieur. Ils présentent à leur pôle externe un croissant de sclérenchyme fibreux.

L'initiale est une bande étroite où l'on trouve quatorze faisceaux dont la grandeur va en diminuant du milieu aux extrémités.

Delphinium Staphysagria L.

Je me bornerai, pour cette espèce, à renvoyer au schéma de la caractéristique (pl. III, fig. 42) et à celui du parcours des faisceaux libéro-ligneux du pétiole (pl. I, fig. 15).

Aconitum Napellus L. (Pl. III, fig. 43.)

$L = 75^{mm}$; $l = 2^{mm}1$; $e = 1^{mm}8$. — La caractéristique est cordiforme, sa membrane externe est épaisse (10 μ). Le tissu

conjonctif est composé de cellules rondes méatiques; on y trouve d'ordinaire dix faisceaux dépourvus de sclérenchyme.

L'initiale présente trois faisceaux D, M, G : le faisceau M émet deux fascicules qui en s'unissant à deux autres fascicules émanés des faisceaux D et G constituent deux nouveaux faisceaux; ceux-ci se rejoignent vers 20^{mm} et forment un faisceau unique supérieur S. Les faisceaux *d*, *g*, naissent du faisceau M vers 3^{mm}; à la même hauteur, les faisceaux D et G émettent deux faisceaux qui se divisent vers 8^{mm} en deux fascicules *d' d''*, *g' g''*.

Dans la portion initiale du pétiole, on trouve du sclérenchyme qui disparaît vers 20^{mm}.

Actæa racemosa D.

$L = 170^{mm}$; $l = 5^{mm}2$; $c = 4^{mm}2$. — L'épiderme est glabre. Le parenchyme cortical se compose de six assises de cellules; on y trouve des grains d'amidon. Il est séparé de la moelle par un péricycle scléreux, fibreux au contact des faisceaux vasculaires, parenchymateux dans leurs intervalles. La moelle est formée de cellules méatiques, rondes ou légèrement polygonales; comme le parenchyme cortical, elle renferme de nombreux grains d'amidon.

Les faisceaux libéro-ligneux sont très nombreux : on en compte environ soixante-dix de grosseur différente; la plupart sont accolés au péricycle, mais on en trouve un certain nombre plus ou moins enfoncés dans le disque médullaire : ce sont les plus gros. On ne retrouve pas ici la disposition symétrique que présentent les faisceaux lorsqu'ils sont moins nombreux. La symétrie n'existe que dans le contour du pétiole.

A l'initiale, qui a la forme d'un croissant, les faisceaux sont beaucoup moins nombreux, on n'en compte guère qu'une vingtaine disposés à peu près suivant une ligne courbe.

5° PÆONIÉES.

Pæonia Montan Sims. (Pl. III, fig. 45.)

$L = 170^{mm}$; $l = 4^{mm}7$; $e = 4^{mm}5$. — Il existe sept ou huit assises hypodermiques de collenchyme (ce qui est un fait excep-

tionnel chez les Renonculacées). Ce collenchyme passe insensiblement à un parenchyme rond, à parois épaisses, contenant quelques mâcles. Les Renonculacées que nous avons étudiées jusqu'à présent, étaient complètement dépourvues de cristaux. Le système libéro-ligneux se compose d'une dizaine de faisceaux dessinant un cercle complet; les trois faisceaux inférieurs atteignent un très grand développement et occupent la moitié inférieure du cercle. On remarquera que la ligne de séparation du bois et du liber est droite, ou légèrement convexe du côté du liber; c'est l'inverse, on s'en souvient, dans les autres genres de Renonculacées. Les faisceaux sont dépourvus de sclérenchyme. Les cellules médullaires, arrondies, méatiques, légèrement sclérifiées, renferment quelques mâcles.

Les *Pæonia romanica, corallina, Broteri* (pl. III, fig. 44) renferment aussi des mâcles, mais on constate que leur système libéro-ligneux ne forme pas un anneau comme dans le *P. Montan*. Ce système se compose de sept ou neuf faisceaux disposés en fer à cheval. Cette différence tient à ce que ces pivoines sont des plantes herbacées, tandis que le *P. Montan* est une plante ligneuse.

Caractères communs. — La famille des Renonculacées comprend cinq tribus, dans chacune desquelles j'ai étudié un certain nombre de genres.

Le pétiole est le plus souvent dépourvu de poils; quand ils existent, ils sont unicellulaires. Il n'y a pas de cristaux, sauf dans les *Pæonia*. Le collenchyme est nul ou rare, excepté dans les Pœoniées. Le sclérenchyme est assez commun, et forme tantôt un arc en arrière de chaque faisceau, tantôt un péricycle continu. Les faisceaux libéro-ligneux sont distincts, grêles et disposés soit en arc de cercle, soit en cercle. On observe cette dernière disposition dans les *Thalictrum*, les *Actæa*, le *Pæonia Montan;* mais, comme nous l'avons déjà vu, les faisceaux du *P. Montan* sont plus nombreux et atteignent un développement qu'on ne retrouve pas dans les Renonculacées herbacées. Les anastomoses entre les faisceaux sont fréquentes. Enfin, je rappellerai que sur une coupe

transversale, le liber a dans chaque faisceau la forme d'une ellipse enchâssée dans le bois; tandis que dans la plupart des plantes il a la forme d'un croissant qui enveloppe le pôle externe de la partie ligneuse.

MAGNOLIACÉES.

1° WINTÉRÉES.

Illicium anisatum Thunberg (¹).

$L = 12^{mm}$; $l = 2^{mm}6$; $e = 2^{mm}$. — Poils nuls. La caractéristique a la forme d'un demi-cercle muni de deux expansions latéro-supérieures. La membrane externe est complètement cuticularisée; elle se colore entièrement par le violet d'aniline. Le tissu conjonctif est formé de cellules rondes, laissant entre elles des méats et même des canaux aérifères. Il n'y a pas de collenchyme. Le système libéro-ligneux se compose d'un seul faisceau courbé en arc de cercle. On trouve des fibres scléreuses accolées au liber. Les cristaux font défaut.

A l'initiale, on trouve également un seul faisceau libéro-ligneux arciforme. Il n'y a pas de fibres scléreuses.

Cette tribu contient encore un autre genre, le genre Drimys. D'après M. Vesque, le pétiole du *Drimys Winteri* (²) renferme cinq faisceaux, trois gros alternant avec deux petits; ils sont groupés au centre du pétiole, où ils dessinent un arc de cercle.

2° MAGNOLIÉES.

Magnolia grandiflora L. (Pl. III, fig. 50.)

$L = 17^{mm}$; $l = 2^{mm}4$; $e = 2^{mm}1$. — La membrane externe de l'épiderme est épaisse, 15 μ; elle se colore complètement par le violet d'aniline. Elle est munie de poils unisériés, à parois très épaisses. Au-dessous de l'épiderme on trouve une couche de quatre ou cinq assises de cellules collenchymateuses. Le parenchyme cortical est formé de cellules rondes, méatiques, entre-

---

(¹) Vesque, *loc. cit.*, pl. II, fig. 42.
(²) *Loc. cit.*, p. 37 et pl. II, fig. 41.

mêlées de grosses cellules scléreuses; il renferme des mâcles très petites et en petit nombre. Le système libéro-ligneux se compose essentiellement d'un anneau formé de faisceaux étroitement accolés; il existe en outre deux petits faisceaux supérieurs. Tous ces faisceaux présentent à leur pôle libérien des arcs épais de fibres scléreuses. Les cellules médullaires sont polygonales et légèrement sclérifiées, elles renferment de petites mâcles. Comme dans le parenchyme cortical, on y trouve mêlées de grosses cellules scléreuses.

La disposition du système libéro-ligneux ne change guèredans la longueur du pétiole. A l'initiale, le système libéro-ligneux forme un anneau comme à la caractéristique, mais les faisceaux y sont moins serrés les uns contre les autres. Les faisceaux supéro-latéraux n'existent pas, ils se détachent de l'anneau vers 12^{mm}.

Liriodendron tulipifera L. (Pl. III, fig. 47-49.)

$L = 110^{mm}$; $l = 2^{mm}3$; $e = 2^{mm}5$. — Poils rares. Le parenchyme cortical est formé de cellules rondes ou polygonales, à petits méats. Le système libéro-ligneux se compose de faisceaux accolés et disposés en ellipse; chacun est accompagné extérieurement d'un arc de sclérenchyme fibreux. Le péricycle est complété par du parenchyme scléreux interfasciculaire. A l'intérieur de cette ellipse se trouve la moelle formée de cellules polygonales. Au-dessus de cette ellipse on trouve de chaque côté deux faisceaux isolés. Le parenchyme cortical et la moelle renferment des mâcles d'oxalate de chaux; elles sont petites et rares.

L'initiale est à peu près demi-circulaire (pl. III, fig. 47), on y trouve onze faisceaux disposés symétriquement; à mesure qu'ils avancent dans le pétiole, ces faisceaux se segmentent et se rapprochent pour former un anneau : à 20^{mm}, par exemple, on en trouve une vingtaine rangés suivant une ellipse à grand axe vertical. Plus loin, le nombre des faisceaux diminue et de chaque côté se détachent deux faisceaux G, *g*, D, *d* (pl. III, fig. 48) : ce sont les faisceaux latéro-supérieurs de la caractéristique (pl. III, fig. 49).

3° SCHIZANDRÉES.

Je n'ai pas eu à ma disposition de plantes appartenant à cette tribu; je me bornerai à dire que, d'après M. Vesque, dans les genres *Sphærostema* et *Kadsura* le système libéro-ligneux du pétiole est disposé en arc.

Je terminerai l'étude de cette famille par une remarque sur la forme affectée par le système libéro-ligneux.

Nous avons vu qu'il dessine un arc dans le *Drimys Winteri*, dans l'*Illicium anisatum*, dans les Schizandrées, c'est-à-dire dans les plantes frutescentes; tandis qu'au contraire il forme un anneau dans le *Liriodendron tulipifera*, dans le *Magnolia grandiflora* et, d'après M. Vesque, dans les autres Magnoliées, c'est-à-dire dans les plantes arborescentes.

Les Magnoliacées nous montrent, comme les familles précédentes, que le développement de l'arc libéro-ligneux du pétiole est en rapport avec le degré de lignosité de la plante.

ROSACÉES.

1° PRUNÉES.

Prunus Lauro-Cerasus L. (Pl. I, fig. 19, et pl. III, fig. 51.)

$L = 6^{mm}$; $l = 1^{mm}8$; $e = 2^{mm}1$. — Poils nuls. L'hypoderme collenchymateux est constitué par quatre ou cinq assises. Le parenchyme cortical, formé de cellules rondes ou ovales à parois épaisses, renferme des cristaux isolés et des mâcles. Le système libéro-ligneux comprend un arc de cercle et deux faisceaux plus petits, supéro-latéraux. Tous ces faisceaux sont recouverts, sur leur côté externe, de fibres scléreuses.

Le système libéro-ligneux débute par trois faisceaux (pl. I, fig. 19) qui, à 2^{mm}, sont complètement soudés; vers $2^{mm}5$, ce faisceau unique émet un petit faisceau à gauche; vers $3^{mm}5$, il en émet un à droite; à partir de là, il ne se produit plus de changement.

Prunus Amygdalus H. Bn., var. **amara.**

$L = 15^{mm}$; $l = 1^{mm}15$; $e = 1^{mm}3$. — Poils nuls. La membrane externe est très épaisse (16 μ), la cuticule bien apparente.

L'hypoderme et le parenchyme cortical ont les mêmes caractères que dans l'espèce précédente. Le système libéro-ligneux offre la même disposition.

2° SPIRÉES.

Spiræa Ulmaria L. (Pl. I, fig. 7, et pl. III, fig. 52.)

$L = 9^{mm}$; $l = 2^{mm}1$; $e = 1^{mm}8$. — Comme dans le genre précédent, nous trouvons ici une couche périphérique de collenchyme. Le parenchyme cortical a des parois plus minces, il renferme également des mâcles. Le système libéro-ligneux a la même disposition, seulement il existe quatre faisceaux supéro-latéraux au lieu de deux. Le sclérenchyme n'est représenté que par quelques fibres.

Le parcours des faisceaux rappelle celui du *Prunus Lauro-Cerasus* avec une légère différence. Le système libéro-ligneux débute par trois faisceaux (pl. I, fig. 7) : un inférieur M et deux latéraux D, G; ces derniers se divisent presque immédiatement en deux : les deux moitiés inférieures se soudent bientôt au faisceau médian (2^{mm}); quant aux moitiés supérieures D', G', elles restent libres, et émettent à 6^{mm} deux faisceaux plus petits.

Nous voyons donc que le parcours des faisceaux dans le *Prunus* et dans le *Spiræa* diffère en ceci : dans le *Spiræa*, les deux faisceaux latéraux D et G émettent, avant de se souder au faisceau médian, les faisceaux D' et G' qui, au contraire, n'apparaissent dans le *Prunus* qu'après la soudure des faisceaux D et G.

L'étude des autres Rosacées va nous montrer que la ramification des faisceaux a toujours lieu suivant l'un de ces deux types.

3° QUILLAJÉES.

Quillaja saponaria Mol. (Pl. III, fig. 53.)

$L = 1^{mm}2$; $l = 1^{mm}65$; $e = 1^{mm}58$. — Poils unicellulaires, à parois épaisses. L'hypoderme est peu épais. Le sclérenchyme est à peu près nul. On trouve des mâcles d'oxalate de chaux. Le pétiole étant très réduit, nous ne serons pas étonnés, si le trajet des faisceaux est moins compliqué que dans les espèces étudiées précédemment. Cependant on peut reconnaître que la disposition

est la même. Ainsi, l'initiale montre trois faisceaux bien distincts qui se soudent ensuite en un faisceau unique. Plus loin, il se produit de chaque côté de ce faisceau des renflements qui, dans certains individus, finissent par se séparer pour constituer deux faisceaux supérieurs distincts.

4° FRAGARIÉES.

Rubus Idæus L. (Pl. III, fig. 54.)

$L = 63^{mm}$; $l = 2^{mm}7$; $e = 2^{mm}7$. — Poils nombreux de 325 μ environ, à parois épaisses. La caractéristique a la forme d'un cercle légèrement déprimé ou même entaillé à la partie supérieure. Le collenchyme comprend trois ou quatre assises. Le parenchyme cortical est formé de cellules grandes, polyédriques, un peu méatiques et à parois minces; certaines contiennent des mâcles. Le système libéro-ligneux se compose de cinq faisceaux; le médian, beaucoup plus grand, possède quelques fibres scléreuses à sa face inférieure. Le parcours des faisceaux a lieu suivant le type du *Spiræa*.

Les *Rubus cæsius* et *nitidus* offrent les mêmes caractères. Comme le *R. Idæus,* ils présentent des poils unicellulaires à parois épaisses, du collenchyme, des mâcles, du sclérenchyme fibreux qui, chez le *R. nitidus,* est très développé, et cinq faisceaux. La caractéristique du *R. cæsius* a la même forme que celle du *R. Idæus;* celle du *R. nitidus* a son bord supérieur convexe.

Geum urbanum L. (Pl. I, fig. 13.)

$L = 25^{mm}$; $l = 1^{mm}2$; $e = 1^{mm}3$. — L'hypoderme est très mince. Il n'y a pas de sclérenchyme. La caractéristique montre cinq faisceaux : un médian inférieur, prépondérant, et quatre petits placés symétriquement de chaque côté. Le parcours des faisceaux a lieu suivant le type *Spiræa;* mais il se produit ici deux anastomoses que je n'ai point retrouvées dans les autres Rosacées : les faisceaux D' et G' émettent deux branches *g, d* qui vont s'unir au faisceau médian, à peu près au niveau de la caractéristique.

Potentilla reptans L.

L = 115^{mm}; l = 1^{mm}5; e = 1^{mm}4. — Poils unicellulaires à parois épaisses. La caractéristique est à peu près cordiforme. L'hypoderme est réduit à une seule assise, sauf dans les lobes supérieures, où il est plus épais. Il y a cinq faisceaux libéro-ligneux, dépourvus de sclérenchyme. Leur parcours est conforme au type *Spiræa*. Les *P. argentea, Nutalii* offrent les mêmes caractères : le premier peut ne posséder que trois faisceaux; le second peut en avoir sept, par suite de la ramification des faisceaux supérieurs. Dans ce genre les mâcles sont très rares et même nulles.

Comarum palustre L. (Pl. I, fig. 6, et pl. III, fig. 55.)

L = 35^{mm} + 15^{mm}; l = 1^{mm}8; e = 1^{mm}65. — Poils unicellulaires de 1^{mm}, à parois épaisses. La caractéristique a la forme d'un triangle à sommets arrondis. Elle offre les caractères généraux de la caractéristique des Rosacées. Les faisceaux libéro-ligneux sont au nombre de cinq. Le sclérenchyme est représenté par quelques fibres. Le parenchyme est creusé de deux lacunes qui révèlent l'adaptation de cette plante à la vie aquatique.

Le parcours des faisceaux présente une particularité : l'initiale (pl. I, fig. 6), au lieu des trois faisceaux que nous avons toujours trouvés jusqu'à présent, en renferme cinq. Mais si l'on fait abstraction des deux faisceaux supplémentaires γ et δ, on retrouve le même trajet que dans le *Spiræa Ulmaria*.

5° AGRIMONIÉES.

Agrimonia Eupatoria L. (Pl. I, fig. 56.)

L = 30^{mm}; l = 1^{mm}5; e = 1^{mm}1. — Je n'insisterai pas sur cette espèce qui n'offre rien de remarquable. Le parcours des faisceaux est conforme au type du *Spiræa*.

Sanguisorba officinalis L. (Pl. I, fig. 5, et pl. III, fig. 57.)

L = 12^{mm} + 30^{mm}; l = 1^{mm}85; e = 1^{mm}80. — Poils nuls. Cette espèce présente quelques particularités. D'abord le paren-

chyme dans sa portion centrale est creusé de nombreuses lacunes que nous pouvons attribuer, comme pour le *Comarum palustre,* à l'habitat de la plante, qui croît dans les lieux humides. En second lieu, à l'initiale, le système libéro-ligneux (abstraction faite de deux faisceaux qui se rendent aux stipules) comprend cinq faisceaux (pl. I, fig. 5). Les faisceaux latéraux inférieurs G, D finissent par se souder (30^{mm}) avec le faisceau médian : ils représentent donc les deux faisceaux latéraux que nous avons rencontrés à la base du pétiole de toutes les Rosacées [1]; la différence résulte peut-être de ce que dans le *Sanguisorba* les faisceaux D' et G' se détachent des précédents avant d'avoir pénétré dans le pétiole.

6° ROSÉES.

Rosa canina L. (Pl. III, fig. 58.)

$L = 15^{mm}$; $l = 0^{mm}99$; $e = 1^{mm}05$. — Poils nuls. La membrane externe est épaisse (8 μ), en grande partie cuticularisée. L'hypoderme collenchymateux forme un anneau bien distinct du parenchyme sous-jacent; celui-ci renferme des mâcles et de nombreux cristaux isolés et volumineux. Les faisceaux, au nombre de trois, offrent du côté externe des croissants de sclérenchyme fibreux. Le parcours des faisceaux reproduit le type *Spiræa.*

7° POMACÉES.

Sorbus latifolia Pers.

$L = 25^{mm}$; $l = 2^{mm}1$; $e = 2^{mm}6$. — Poils laineux unicellulaires de $1^{mm}5$. Les cristaux se rencontrent sous forme de mâcles et de prismes; le sclérenchyme fibreux est abondant. Le système libéro-ligneux se compose de cinq faisceaux : l'inférieur en forme d'U prend un développement considérable et peut même rejoindre les deux faisceaux G et D, qui cependant ne se fusionnent pas avec lui, et restent bien distincts.

Le trajet des faisceaux libéro-ligneux dans le pétiole a lieu suivant le type *Spiræa.*

---

[1] Voyez par exemple le schéma du *Spiræa ulmaria* (pl. I, fig. 7).

Le parcours des faisceaux pétiolaires du *Sorbus Aucuparia* présente une anomalie [1] : on trouve à l'initiale cinq faisceaux au lieu de trois (pl. I, fig. 17); mais les faisceaux latéraux se soudant deux à deux, il ne reste plus que trois faisceaux, comme dans les autres Rosacées. On remarquera encore l'existence anormale des faisceaux intercalaires *d*, *g*; de plus, ces faisceaux, au lieu de partir des bords du faisceau médian arciforme, s'en détachent sous forme de boucles latérales (pl. III, fig. 62, *d*, *g*).

Toutes les Pomacées présentent les mêmes caractères que le *Sorbus latifolia;* parmi les plus saillants, il faut noter, outre ceux qui leur sont communs avec les Rosacées des autres tribus, la grande importance que prend le faisceau médian inférieur et le plus grand développement du sclérenchyme fibreux : chez le *Raphiolepis ovata* (pl. III, fig. 60) notamment, les faisceaux en sont pourvus sur leurs deux faces. On remarque quelques variétés dans les formations cristallines : tantôt on rencontre exclusivement des mâcles *(Cratægus monogyna)*, tantôt des mâcles et des cristaux isolés *(Raphiolepis ovata, Photinia serrulata, Cydonia vulgaris)*. Le *Raphiolepis ovata* a une caractéristique de forme particulière, due à la décurrence du limbe sur le pétiole.

Caractères communs. — La famille des Rosacées comprend neuf tribus : j'ai laissé de côté, faute d'échantillons, les Chrysobalanées et les Neuradées. Cette dernière du reste ne comprend que deux genres et quatre espèces.

La plupart des Rosacées renferment du collenchyme et du sclérenchyme; celui-ci fait défaut chez les Potentilles, le *Sanguisorba...*, etc. On trouve toujours des mâcles (sauf dans quelques Potentilles), elles peuvent être associées à des cristaux isolés.

Nous avons vu que le trajet des faisceaux libéro-ligneux offre dans toutes les Rosacées une disposition semblable et particulière à cette famille. Nous avons également remarqué que le faisceau inférieur est prépondérant, mais que dans les plantes

---

[1] Cette anomalie a déjà été signalée par M. R. Gérard. Voyez *Structure des Pomacées* (Thèse d'agrégation, 1884).

arborescentes *(Sorbus latifolia)* (pl. III, fig. 61), il est relativement plus développé que dans les plantes herbacées *(Comarum palustre)* (pl. III, fig. 57).

LÉGUMINEUSES.

I. PAPILIONACÉES.

1° PODALYRIÉES.

Anagyris fœtida L. (Pl. III, fig. 63, et pl. VI, fig. 65.)

$L = 15^{mm}$; $l = 1^{mm}45$; $e = 1^{mm}1$. — Poils unicellulaires de 450 μ. Caractéristique réniforme. Les cellules épidermiques inférieures sont remarquables par leur développement exagéré [1] (pl. VI, fig. 65). Il n'y a pas de cristaux. La portion principale du système libéro-ligneux forme un anneau; de plus, il existe deux faisceaux supéro-latéraux *d*, *g*. Les faisceaux possèdent du sclérenchyme fibreux.

Le système libéro-ligneux débute par trois faisceaux et se dispose en anneau d'une manière spéciale, mais assez fréquente chez les Légumineuses. Je la ferai connaître en parlant du genre suivant.

2° GÉNISTÉES.

Cytisus Laburnum L. (Pl. IV, fig. 26-30.)

$L = 75^{mm}$; $l = 1^{mm}40$; $e = 1^{mm}20$. — Poils unicellulaires de $1^{mm}15$. La forme générale de la caractéristique est pentagonale. Il existe une assise de cellules hypodermiques. Le système libéro-ligneux, pourvu de fibres scléreuses, forme un anneau surmonté de quatre faisceaux. (Pl. IV, fig. 30.)

A l'initiale (pl. IV, fig. 26), on ne trouve que trois faisceaux, G, M, D. Les faisceaux G et D émettent chacun un fascicule; le faisceau M en émet deux (pl. IV, fig. 27). Ces quatre fascicules, en se soudant deux à deux, forment deux faisceaux qui se portent à la partie supérieure (1^{mm}). (Voir le schéma, pl. I, fig. 2.) Il existe alors cinq faisceaux qui se soudent immédiatement en anneau. Nous

---

[1] Les cellules épidermiques du limbe ne présentent pas cette anomalie. Je ne l'ai pas non plus rencontrée dans la feuille de l'*Anagyris neapolitana*.

retrouverons dans d'autres espèces appartenant soit aux Légumineuses, soit à d'autres familles, le même mode de formation; je me contenterai alors de renvoyer à la description que je viens d'en donner. Cependant il se produit encore, chez le *C. Laburnum,* d'autres modifications. A 2^{mm}, on voit se former une boucle *d* en haut et à droite de l'anneau; peu après il s'en produit une semblable à gauche. A 5^{mm}, ces deux boucles sont complètement détachées et forment deux faisceaux *d, g,* qui émettent parfois deux autres petits faisceaux médians supérieurs *d'*, *g'* (pl. IV, fig. 30).

Il est à remarquer que le sclérenchyme n'existe pas à la base du pétiole; il n'apparaît que vers 2^{mm}.

Dans l'*Anagyris fœtida* (pl. III, fig. 63), l'anneau libéro-ligneux se forme comme il a été indiqué chez le *Cytisus*. Quant aux faisceaux *d* et *g*, ils se détachent des faisceaux latéraux primitifs avant que ceux-ci soient soudés ensemble.

Sarothamnus scoparius K. (Pl. III, fig. 65.)

$L = 10^{mm}$; $l = 0^{mm}66$; $e = 0^{mm}40$. — La caractéristique, cordiforme, aplatie, présente trois faisceaux, le médian beaucoup plus développé. Il n'y en a qu'un à l'initiale. On trouve du sclérenchyme adossé au liber.

Lupinus Sp.

$L = 180^{mm}$; $l = 2^{mm}25$; $e = 2^{mm}10$. — Poils subulés, unicellulaires, de $0^{mm}5$. La caractéristique est un triangle à sommet arrondi. Le parenchyme cortical a des cellules rondes, un peu méatiques, à parois minces. Les faisceaux scléro-libéroligneux plus ou moins rapprochés dessinent un cercle, dont l'intérieur est presque entièrement occupé par une grande lacune.

L'initiale a la forme d'un V. On y trouve cinq faisceaux, deux dans chaque branche, un à leur jonction. Les branches du V s'épaississent, se rejoignent en formant un triangle avec une lacune centrale; peu à peu les sommets du triangle s'arrondissent tandis que les cinq faisceaux initiaux se fragmentent d'une façon

irrégulière en un grand nombre de petits faisceaux disposés en triangle.

3° TRIFOLIÉES.

Ononis Natrix L. (Pl. I, fig 3.)

L = 15^{mm} + 18^{mm}; l = $1^{mm}5$; e = $1^{mm}4$. — Poils de deux sortes : 1° glanduleux, pluricellulaires, longuement pédonculés, de $0^{mm}1$; 2° poils unisériés composés de 7-8 cellules, et pouvant atteindre 2^{mm}. La caractéristique représente un U à branches renflées. Elle ne contient pas de collenchyme ni de cristaux. Les faisceaux accompagnés de quelques fibres scléreuses sont au nombre de neuf. Leur parcours est représenté par le schéma (pl. I, fig. 3). On voit qu'ils débutent (abstraction faite des faisceaux stipulaires) par trois faisceaux qui s'anastomosent un peu au-dessous de la pseudo-initiale; puis les faisceaux G' et D' se ramifient. Cette disposition que nous retrouverons dans beaucoup de légumineuses herbacées, rappelle celle que nous ont offerte les Rosacées. Elle en diffère cependant, parce que dans cette dernière famille l'anastomose est franchement oblique par rapport au faisceau M, tandis que dans les Légumineuses elle lui est perpendiculaire. Du reste, il sera toujours facile de distinguer une Rosacée d'une Légumineuse, par la présence ou l'absence de mâcles.

Ononis procurrens Wallr.

L = 2^{mm} + 1^{mm}; l = $0^{mm}7$; e = $0^{mm}66$. — Poils ($2^{mm}15$) unisériés, composés de quatre ou cinq cellules. Bien que les feuilles de l'*O. procurrens* soient bien petites relativement à celles de l'*O. Natrix* (le limbe est réduit à une seule foliole dans les feuilles supérieures et le pétiole n'a que 3^{mm} au lieu de 33^{mm}), cependant les faisceaux pétiolaires présentent la même disposition; seulement ils sont moins nombreux : la caractéristique n'en contient que cinq au lieu de neuf.

Melilotus parviflora Desf.

L = 1^{mm} + 22^{mm}; l = $0^{mm}82$; e = $0^{mm}45$. — Poils nuls. Ce pétiole n'offre pas, au point de vue de la structure, de grandes

différences avec celui de l'espèce précédente. La forme de la caractéristique n'est cependant pas la même. Quant au parcours des faisceaux, il est très semblable à celui de l'*Ononis Natrix*. Celui-ci, nous l'avons vu, reproduit dans les Papilionacées le type du *Spiræà ulmaria*, le *Melilotus parviflora* au contraire rappelle le type du *Prunus Lauro-Cerasus*.

Le *Melilotus officinalis* possède trois faisceaux, comme le *M. parviflora;* on y trouve un peu de sclérenchyme.

Medicago lupulina L.

L = 15 mm; *l* = 1mm; *e* = 0mm75. — Poils (0mm5) peu nombreux placés à la face supérieure. On trouve dans le parenchyme cortical des cristaux isolés. Les faisceaux doublés de sclérenchyme ont la disposition décrite chez le *Melilotus parviflora*.

Le *Medicago arborea* ne présente rien de particulier. On n'y trouve que des cristaux isolés, généralement placés dans les cellules du parenchyme cortical, contiguës aux fibres scléreuses.

Trifolium pratense L. (Pl. III, fig. 70.)

L = 25mm + 110mm; *l* = 1mm2; *e* =1mm15. — Poils unicellulaires pouvant atteindre 1mm3. La caractéristique est cordiforme. Le collenchyme est nul. Le parenchyme se compose de cellules rondes à parois minces. On y trouve quelques cristaux isolés principalement au contact des faisceaux. Ceux-ci sont au nombre de cinq. Ils sont dépourvus de sclérenchyme, mais présentent des fibres épaisses (pl. III, fig. 70).

Le système libéro-ligneux débute par trois faisceaux, qui vers la fin de la gaine donnent naissance à deux autres comme l'indique la figure (pl. I, fig. 21).

Dans les *Trifolium angustifolium* et *subterraneum*, le parcours des faisceaux est le même que dans le *T. pratense*.

Le *T. incarnatum* (pl. III, fig. 69) possède à la caractéristique sept faisceaux au lieu de cinq.

4° LOTÉES.

Lotus corniculatus L. (Pl. III, fig. 71.)

$L = 3^{mm}5$; $l = 1^{mm}02$; $e = 0^{mm}6$. — Poils nuls. On ne trouve pas de cristaux dans cette espèce. Le système libéroligneux est formé de trois faisceaux accompagnés d'un peu de sclérenchyme. Je n'ai point observé d'anastomose.

L'*Anthyllis vulneraria* ne diffère pas beaucoup du précédent, seulement on trouve à la caractéristique cinq faisceaux au lieu de trois.

5° GALÉGÉES.

Psoralea stachydis L. (Pl. III, fig. 72.)

$L = 65^{mm}$; $l = 2^{mm}3$; $e = 2^{mm}1$. — Poils nuls. La caractéristique a la forme d'une feuille de lierre, ses parties saillantes renferment du collenchyme. On y trouve cinq gros faisceaux et quatre petits intercalaires. Ils sont revêtus de fibres scléreuses à leur pôle externe, et de parenchyme sclérenchymateux à leur pôle interne. Ce parenchyme renferme des cristaux isolés, ainsi que les cellules du parenchyme cortical adhérentes aux fibres scléreuses.

A l'initiale les faisceaux accolés les uns aux autres dessinent un pentagone. Ces faisceaux ne tardent pas à diverger, en se portant vers la périphérie, et à partir de 5^{mm} leur nombre et leur position restent à peu près invariables.

Galega officinalis L. (Pl. IV, fig. 1.)

$L = 5^{mm}$; $l = 3^{mm}5$; $e = 3^{mm}5$. — Poils nuls. La caractéristique est pentagonale. Le tissu conjonctif se compose de cellules polygonales, dont la grandeur diminue du centre à la périphérie. Quelques-unes d'entre elles, appliquées contre le tissu scléreux des faisceaux renferment des cristaux isolés. Les faisceaux, au nombre de quinze, bien distincts, sont disposés suivant les côtés d'un pentagone, dont l'intérieur renferme une grande lacune.

Amorpha fruticosa L. (Pl. III, fig. 73.)

$L = 18^{mm}$; $l = 1^{mm}32$; $e = 1^{mm}48$. — Poils (250 μ) unisériés, composés généralement d'une ou deux petites cellules surmontées

d'une grande. La caractéristique est un pentagone dont le côté supérieur est concave. Le parenchyme cortical est formé par des cellules elliptiques, aplaties dans le sens radical. La moelle comprend de grandes cellules polygonales un peu méatiques. Les faisceaux accolés, mais distincts forment un pentagone surmonté de deux autres petits faisceaux. Tous sont enveloppés par un péricycle de fibres scléreuses. Quelques cellules corticales en contact avec ce péricycle renferment des cristaux isolés.

Colutea arborescens L. (Pl. IV, fig. 3.)

$L = 20^{mm}$; $l = 1^{mm}90$; $e = 1^{mm}7$. — Poils nuls. Caractéristique cordiforme. Cristaux nuls. Le système libéro-ligneux débute par trois faisceaux qui à $0^{mm}5$ sont soudés en forme de C. A 3^{mm}, on constate que le C est partagé en trois segments principaux, deux supérieurs et un inférieur séparé des précédents par deux petits faisceaux qui finissent par se souder aux faisceaux supérieurs. La caractéristique présente donc trois faisceaux emboîtés dans des arcs scléreux.

Glycyrrhiza glabra L. (Pl. IV, fig. 4.)

$L = 22^{mm}$; $l = 2^{mm}4$; $e = 2^{mm}4$. — Poils unicellulaires de 250 μ, et poils glanduleux. Cristaux isolés. La caractéristique triangulaire ressemble beaucoup à la précédente; le système libéro-ligneux y est disposé de la même manière. Cependant le parcours des faisceaux est différent. A l'initiale, on trouve trois faisceaux qui se disposent en anneau (7^{mm}) suivant le type du *Cytisus Laburnum*. Plus loin, à 10^{mm}, on voit naître deux petits fascicules de la partie supérieure de l'anneau, qui se fragmente comme l'indique le schéma.

Indigofera Dosua Hamilt. (Pl. III, fig. 74.)

$L = 9^{mm}$; $l = 1^{mm}$; $e = 1^{mm}1$. — Poils (250 μ) en navette. Caractéristique ogivale. La structure générale du pétiole est sensiblement la même que dans le *Glycyrrhiza :* les faisceaux débutent au nombre de trois et ont un parcours semblable.

Robinia pseudo-Acacia L. (Pl. IV, fig. 2.)

L = 22^{mm}; *l* = 1^{mm}4; *e* = 1^{mm}4. — Poils rares. La caractéristique est pentagonale. Le parenchyme cortical à cellules arrondies est recouvert dans les parties saillantes d'un hypoderme collenchymateux. Les cellules médullaires sont grandes, polyédriques. Le système libéro-ligneux rappelle celui de l'*Indigofera* et du *Glycyrrhiza*, mais ici les faisceaux centraux sont plus rapprochés les uns des autres ou même soudés ensemble. Le péricycle est continu. Comme dans les autres espèces de Galégées on trouve quelques cristaux isolés, contre les fibres scléreuses. On observe également des cellules tannifères, dans la moelle et dans le liber.

Le système libéro-ligneux débute par trois faisceaux qui s'unissent et forment à 2^{mm} un anneau complet. Cet anneau s'ouvre à la partie supérieure, ses deux branches émettent les deux faisceaux *d*, *g* (3^{mm}), puis se referment (5^{mm}). En même temps, l'anneau se fragmente en un petit nombre de faisceaux séparés par quelques cellules scléreuses.

6° HEDYSACÉES.

Ornithopus ebracteatus Brot.

L = 20^{mm}; *l* = 0^{mm}8; *e* = 0^{mm}55. — Poils nuls. Il n'y a pas d'hypoderme. Les cellules corticales sont arrondies, méatiques, chlorophylliennes, à parois minces; les cellules internes s'en distinguent par leurs plus grandes dimensions et leur manque de chlorophylle. Le système libéro-ligneux se compose de trois faisceaux avec croissant externe de fibres scléreuses. Il en est ainsi dans toute la longueur du pétiole. On trouve quelques cellules sécrétrices et des cristaux isolés.

Dans le *Desmodium canadense* (pl. IV, fig. 7), le système libéro-ligneux débute par trois faisceaux, qui à 1^{mm} se soudent en anneau complet, puis finissent par se séparer. A 10^{mm}, ils ont sensiblement la même disposition qu'à la caractéristique (22^{mm}).

J'ai également étudié dans cette tribu une espèce herbacée d'*Hedysarum* (pl. IV, fig. 6), dont le pétiole dépasse 150^{mm}. La

caractéristique présente onze faisceaux munis de sclérenchyme et disposés à la périphérie.

7° VICIÉES.

Vicia angustifolia Roth. (Pl. IV, fig. 8.)

$L = 4^{mm}$; $l = 0^{mm}79$; $e = 0^{mm}82$. — Poils rares. On trouve sous l'épiderme deux assises de petites cellules chlorophylliennes; elles sont séparées des cellules internes par du sclérenchyme parenchymateux qui relie entre eux les faisceaux. Ceux-ci sont au nombre de cinq; ils ont tous des fibres scléreuses à leur pôle externe; quelques-uns en présentent aussi, mais en moins grande quantité, à leur pôle interne. On trouve quelques cristaux dans les cellules corticales accolées aux fibres scléreuses.

Vicia dumetorum L. (Pl. IV, fig. 10.)

$L = 6^{mm}$; $l = 1^{mm}7$; $e = 1^{mm}8$. — Poils nuls. Je me bornerai à citer les caractères différentiels : la moelle renferme une lacune, le nombre des faisceaux est plus grand que chez le *V. angustifolia;* leur parcours est représenté schématiquement (pl. I, fig. 14).

Le *Vicia altissima* (pl. IV, fig. 9) et le *Vicia sativa* ne présentent rien de particulier.

Lathyrus sphæricus Retz. (Pl. IV, fig. 12.)

$L = 10^{mm}$; $l = 1^{mm}5$; $e = 1^{mm}$. — Quelques poils de 300 μ. La caractéristique a la forme d'un V. Il n'y a pas d'hypoderme. On compte cinq faisceaux principaux qui existent déjà à l'initiale, plus deux petits faisceaux intercalaires. Entre ces faisceaux et dans la partie centrale du pétiole, on trouve de grandes cellules polygonales de parenchyme scléreux. Les faisceaux sont recouverts à leurs deux pôles de fibres scléreuses. On trouve dans le parenchyme cortical des cristaux isolés.

Faba vulgaris L. (Pl. IV, fig. 11.)

$L = 10^{mm}$; $l = 3^{mm}$; $e = 4^{mm}7$. — Poils : néant. Nous retrouvons ici les mêmes caractères que précédemment : hypoderme nul,

cristaux isolés, sclérose des rayons médullaires. La disposition des faisceaux rappelle celle du *Vicia dumetorum.*

Les caractéristiques des diverses espèces de Viciées que nous venons d'étudier ont des formes très voisines. Toutes renferment du parenchyme scléreux.

8° PHASÉOLÉES.

Glycine sinensis. (Pl. IV, fig. 13.)

$L = 75^{mm}$; $l = 1^{mm}9$; $e = 2^{mm}3$. — Poils scléreux de 300 μ, formés en général d'une cellule inférieure petite et d'une cellule terminale beaucoup plus grande. Caractéristique ogivale. Membrane externe : 10 μ. Le parenchyme cortical se compose d'environ quatre assises de cellules arrondies sans méats et renferme quelques cristaux isolés. Le tissu médullaire, séparé du précédent par un anneau de fibres scléreuses, renferme des cellules polygonales. un peu méatiques, sclérifiées. Le système libéro-ligneux se compose d'un anneau ogival, surmonté de deux petits faisceaux. L'anneau se compose d'un certain nombre de faisceaux séparés par du sclérenchyme parenchymateux, et entourés d'un péricycle commun de fibres scléreuses; on trouve également des croissants de fibres scléreuses au pôle externe des faisceaux supérieurs. Il existe des cellules sécrétrices dans la moelle et dans le liber.

A l'initiale les faisceaux supérieurs font défaut; on ne trouve qu'un anneau libéro-ligneux à moelle très réduite et dépourvu de péricycle. A 2^{mm}, cet anneau se fend à sa partie supérieure comme nous l'avons vu chez le *Robinia pseudo-Acacia,* et émet deux faisceaux. Puis l'anneau se referme, acquiert un péricycle (6^{mm}) qui s'épaissit à mesure que l'on avance dans le pétiole; en même temps les faisceaux qui étaient fusionnés à l'initiale, deviennent distincts.

L'*Erythrina Crista-Galli* (pl. IV, fig. 14) offre de grands rapports avec le *Glycine sinensis.* A la caractéristique, la coalescence est moins grande entre les faisceaux; chacun possède un croissant de fibres scléreuses, mais celles-ci ne forment pas un anneau continu ; enfin les deux faisceaux supérieurs manquent. Le système

libéro-ligneux débute comme dans le *Glycine*, par un anneau qui s'élargit un peu plus loin.

Dans l'*Apios tuberosa* (pl. IV, fig. 15), la caractéristique montre des faisceaux exactement disposés comme dans le *Glycine sinensis;* seulement les faisceaux sont moins rapprochés les uns des autres et le péricycle fibreux est moins épais.

Phaseolus multiflorus Willd.

$L = 100^{mm}$; $l = 2^{mm}5$; $e = 3^{mm}$. — Le parenchyme cortical est formé de quatre à cinq assises de cellules polygonales, sans méats; on y trouve quelques cristaux isolés. Les cellules du parenchyme médullaire ne sont guère plus grandes que les précédentes, mais elles ont des parois plus minces laissant entre elles de petits méats. Le système libéro-ligneux offre la même disposition que dans l'*Apios tuberosa;* mais ici les faisceaux sont plus écartés, les fibres scléreuses ont des parois moins épaisses, elles sont aussi moins nombreuses. Le liber renferme des cellules tannifères.

Le parcours des faisceaux est le même que dans l'*Apios tuberosa*.

9° DALBERGIÉES.

Dalbergia latisiliqua.

$L = 24^{mm}$; $l = 1^{mm}15$; $e = 1^{mm}3$. — Poils nuls. Le système libéro-ligneux rappelle celui du *Glycine sinensis,* sauf que les faisceaux sont complètement soudés à la caractéristique; ils le sont même dès l'initiale où ils forment un C couché.

10° SOPHORÉES.

Sophora japonica. (Pl. IV, fig. 17.)

$L = 35^{mm}$; $l = 1^{mm}5$; $e = 1^{mm}7$. — Poils de $0^{mm}5$ à parois épaisses. Le système libéro-ligneux débute par trois faisceaux, qui, à 5^{mm}, forment un anneau, comme dans le *Cytisus Laburnum*. Puis cet anneau se fend comme chez le *Robinia pseudo-Acacia,* et émet deux faisceaux. Finalement on obtient à la caractéristique la même disposition que dans le *Dalbergia latisiliqua,*

mais le sclérenchyme y est beaucoup plus développé ; il faut noter que ce tissu scléreux n'existe pas à l'initiale, il n'apparaît que vers 2^{mm}.

Toluifera Balsamum Miller. (Pl. IV, fig. 18.)

$L = 25^{mm}$; $l = 2^{mm}25$; $e = 1^{mm}6$. — Poils nuls. Caractéristique semi-lunaire. La membrane externe a une épaisseur de 7 μ. Les cellules épidermiques sont petites, les cellules corticales disposées sur cinq ou six assises sont plus grandes, et renferment des cristaux isolés; elles englobent un certain nombre de canaux sécréteurs. Les cellules médullaires polygonales, plus grandes que celles de l'écorce, mais peu méatiques, contiennent de gros cristaux et de nombreux petits grains d'amidon. Le système libéro-ligneux est constitué par un grand anneau semi-elliptique, surmonté d'un petit faisceau annulaire. Le liber est doublé d'un péricycle de fibres scléreuses.

A l'initiale l'anneau inférieur existe seul. A 8^{mm}, on voit se former à peu près au milieu de son côté supérieur une boucle qui finit par s'en détacher, et constitue alors le petit anneau supérieur que l'on voit à la caractéristique.

II. CÉSALPINIÉES.

BAUHINIÉES.

Cercis silisquastrum L. (Pl. IV, fig. 31-36.)

$L = 35^{mm}$; $l = 3^{mm}6$; $e = 1^{mm}8$. — Poils nuls. La caractéristique est réniforme. Le parenchyme cortical se compose de cellules ovales à parois épaisses. Il renferme quelques cristaux isolés et des mâcles dont la présence constitue un fait exceptionnel chez les Légumineuses. Le système libéro-ligneux forme à la caractéristique trois anneaux : un médian et deux latéraux (le médian est généralement ouvert en haut). Tous les trois sont englobés dans une masse de fibres qui, dépourvues de lignin à la caractéristique, sont cependant scléreuses dans la majeure partie du pétiole.

Le système libéro-ligneux débute par trois faisceaux (pl. IV,

fig. 31) bien distincts, qui se soudent et se disposent en demi-cercle (2^{mm}) (fig. 23). Ce demi-cercle, à son tour, se ferme et l'anneau ainsi produit donne naissance à une boucle latéro-supérieure (4^{mm}) (fig. 33). Cette boucle en se détachant de l'anneau principal forme un petit anneau supérieur (27^{mm}) (fig. 34). A ce niveau la coupe ressemble à la caractéristique du *Toluifera Balsamum* (voy. pl. IV, fig. 18). Puis à mesure que l'on se rapproche du limbe, on voit (32^{mm}) les deux anneaux se diviser : le supérieur donne naissance à deux anneaux *d*, *g*, l'inférieur à trois (un médian M et deux latéraux D, G) (fig. 35). Plus loin, les anneaux supérieurs *g*, *d* se soudent respectivement aux anneaux inférieurs D, G, placés du même côté; il ne reste donc plus que trois anneaux (35^{mm}) (fig. 36); généralement l'anneau médian s'ouvre vers le haut.

Bauhinia racemosa. (Pl. IV, fig. 71-79.)

L = 65^{mm}. A l'initiale, on trouve trois anneaux libéro-ligneux (pl. IV, fig. 71), qui plus loin (1^{mm}) se soudent en un seul anneau B (fig. 72). Quelques fascicules restés libres dans l'intérieur de cet anneau forment un second anneau A, dont le liber est interne, tandis qu'il est externe dans l'anneau enveloppant B (2^{mm}) (fig. 73). Nous voyons ensuite (11^{mm}) (fig. 74), les anneaux A et B se souder par leur partie supérieure; se séparer encore (24^{mm}) (fig. 75), et se fusionner de nouveau (56^{mm}) (fig. 76). Plus loin (60^{mm}), la partie supérieure (*a*) du système libéro-ligneux se détache du reste sous forme d'un anneau aplati, tandis que la portion principale prend la forme d'un rognon. Puis l'anneau supérieur s'atrophie peu à peu (fig. 78) et disparaît; tandis que l'anneau inférieur se divise en quatre faisceaux semi-lunaires, rangés suivant une ligne perpendiculaire au plan de symétrie du pétiole (65^{mm}. Caractéristique) (fig. 79). Les deux médians proviennent de l'anneau interne A; les deux latéraux de l'anneau externe B. Chez ceux-ci, le liber est externe, le bois interne; chez ceux-là, le liber est tourné vers le plan médian, et le bois opposé à celui des faisceaux latéraux.

Ces faisceaux sont entourés à la caractéristique de fibres épaisses, non sclérifiées; ces fibres se montrent au contraire lignifiées de 20 à 62 millimètres.

Le pétiole du *Bauhinia racemosa* renferme des mâcles comme celui du *Cercis siliquastrum.*

La tribu des Bauhiniées renferme un troisième genre, le genre *Bandeiræa,* je n'en ai pas eu d'échantillons à ma disposition; il serait intéressant à étudier, car il est probable que le trajet des faisceaux pétiolaires doit y présenter des particularités analogues à celles que je viens de décrire dans le *Cercis* et le *Bauhinia.*

Dans les autres Césalpiniées que j'ai pu examiner, le système libéro-ligneux du pétiole ne présente pas les mêmes singularités que chez les Bauhiniées. J'y ai observé au contraire les différentes formes que nous avons rencontrées dans les Papilionacées arborescentes.

Ainsi dans le *Cesalpina echinata* (Eucésalpiniées) (pl. IV, fig. 19), le système libéro-ligneux débute par trois faisceaux, qui forment rapidement un anneau complet, enveloppé d'un péricycle de fibres scléreuses. Ces fibres, ainsi que la plupart des éléments ligneux, ont des parois très épaisses qui expliquent la grande dureté de ce pétiole.

Dans une espèce de *Cassia* (Cassiées) (pl. IV, fig. 20), j'ai retrouvé le même parcours des faisceaux que dans l'*Indigofera.*

Le *Ceratonia siliqua* (Cassiées) (pl. IV, fig. 21) présente à l'initiale un système libéro-ligneux déjà disposé en anneau, comme nous l'avons vu dans le *Glycine sinensis,* par exemple. Mais tandis que, dans cette espèce, l'anneau se fend et que des extrémités de ses branches il naît deux faisceaux, dans le *Ceratonia siliqua,* l'anneau reste continu et forme à sa partie supérieure deux boucles, qui ne se détachent pas.

Dans le *Tamarindus indica* (Amherstiées) (pl. IV, fig. 22) et le *Copaifera Langsdorfii,* nous voyons au contraire l'anneau inférieur principal surmonté de deux petits faisceaux.

III. MIMOSÉES.

1° EUMIMOSÉES.

Mimosa pudica L. (Pl. IV, fig. 25.)

$L = 45^{mm}$; $l = 1^{mm}35$; $e = 1^{mm}20$. — Poils de trois sortes : 1° unisériés formés de trois ou quatre cellules atteignant 175 μ; 2° plurisériés (225 μ); 3° glanduleux, pluricellulaires de 75 μ. Le parenchyme cortical formé de quatre ou cinq assises de cellules rondes, un peu méatiques, renferme quelques cristaux isolés. Les cellules médullaires sont un peu plus petites que les cellules corticales. Le système libéro-ligneux se compose d'un cercle divisé en deux moitiés inégales, et de deux faisceaux latéro-supérieurs. Ces faisceaux ainsi que le cercle sont accompagnés de fibres scléreuses.

Le système libéro-ligneux débute par trois faisceaux, qui forment un cercle (1^{mm}) comme nous l'avons vu dans le *Cytisus Laburnum*. Puis cet anneau se fend en deux moitiés inégales, la supérieure étant plus petite que l'inférieure. Celle-ci émet deux branches, qui deviennent les faisceaux supérieurs de la caractéristique.

2° ACACIÉES.

Acacia Julibrissin Wild. (Pl. IV, fig. 23.)

$L = 55^{mm}$; $l = 2^{mm}15$; $e = 2^{mm}80$. — Le parenchyme cortical se compose de cellules elliptiques aplaties dans le sens radial, à méats nuls ou très petits. On trouve des cristaux isolés dans certaines de ces cellules qui sont en contact avec les faisceaux. Les cellules médullaires sont plus grandes, polyédriques, peu méatiques; leur membrane est mince et légèrement sclérifiée. Le système libéro-ligneux se compose d'un anneau, surmonté de deux faisceaux. Les fibres scléreuses forment un demi-cercle au pôle libérien des petits faisceaux supérieurs, et une gaine complète autour de l'anneau inférieur.

Le système libéro-ligneux débute par un anneau, qui, d'abord étiré latéralement, devient circulaire, puis allongé de bas en haut.

A 3^{mm}, on voit l'anneau se segmenter à sa partie supérieure : il s'en détache trois faisceaux distincts; les deux latéraux se séparent définitivement de l'anneau et se portent à la partie supérieure du pétiole, le faisceau médian, au contraire, reste en place et se soude de nouveau à l'anneau.

Acacia Lophanta Wild. (Pl. IV, fig. 24.)

$L = 29^{mm}$; $l = 0^{mm}9$; $e = 1^{mm}65$. — Poils unicellulaires de 125 μ. Ce pétiole était un peu phyllodinisé comme l'indique la forme aplatie de sa caractéristique. Les différents tissus présentent les mêmes caractères que dans l'espèce précédente. La moelle notamment y est sclérifiée. Le système libéro-ligneux débute également par un anneau, mais qui se dissocie en plusieurs faisceaux distincts.

Dans cette même espèce on trouve des feuilles complètement phyllodinisées. Les faisceaux y sont alors plus grêles, plus nombreux et nettement séparés les uns des autres.

CARACTÈRES COMMUNS. — La famille des Légumineuses se partage en trois sous-familles : Papilionacées, Césalpiniées, Mimosées. Les Papilionacées se divisent en onze tribus dans chacune desquelles (sauf les Swartziées), j'ai étudié un certain nombre de genres. Les Césalpiniées comprennent sept tribus : j'ai examiné des plantes appartenant à cinq de ces tribus. Enfin, j'ai étudié trois espèces appartenant à deux tribus différentes des Mimosées, qui se répartissent en cinq tribus.

Dans la majorité des cas, le pétiole ne possède pas de poils; quand il y en a, ils sont généralement unicellulaires (ex. *Trifolium pratense*), plus rarement unisériés (ex. *Ononis procurrens*); on trouve aussi parfois des poils glanduleux (ex. *Vicia sativa*). Le *Mimosa pudica* est muni de poils unisériés, plurisériés et glanduleux. Le collenchyme est assez rare; cependant il en existe quelquefois *(Psoralea stachydis, Robinia pseudo-Acacia)*, mais il est peu abondant et mal caractérisé. Je n'ai pas rencontré de cristaux dans les tribus des Podalyriées, des Génistées, des Lotées, dans une partie des Trifoliées *(Medicago, Melilotus)*. Ils existent

au contraire à l'état isolé, dans une partie des Trifoliées *(Trifolium)* et dans les autres tribus. Le plus souvent on les trouve exclusivement dans le parenchyme cortical, au contact des fibres scléreuses. D'autres fois le liber en renferme en même temps que le parenchyme cortical *(Erythrina Crista-Galli, Sophora japonica)*. Le *Cercis siliquastrum* et le *Bauhinia racemosa*, outre des cristaux isolés, renferment des mâcles. Le sclérenchyme se présente sous la forme de fibres accolées aux faisceaux libéro-ligneux dans toutes les Légumineuses que j'ai examinées, sauf les *Medicago* et les *Trifolium*. Dans le *Cercis siliquastrum* et le *Bauhinia racemosa*, les faisceaux libéro-ligneux sont bien enveloppés dans une gaine fibreuse, mais qui n'est pas sclérifiée à l'extrémité foliaire du pétiole. Cet organe renferme parfois des cellules sécrétrices dont la situation dépend de l'espèce considérée.

La disposition du système libéro-ligneux est très variable. Tantôt on trouve trois faisceaux parallèles, dépourvus d'anastomoses dans toute la longueur du pétiole *(Lotus corniculatus)*; tantôt il se produit vers l'extrémité de la gaine, entre ces trois faisceaux, deux anastomoses qui leur sont à peu près perpendiculaires *(Trifolium, Ononis, Melilotus, Medicago)*; tantôt il existe à l'initiale un petit nombre de faisceaux distincts, qui plus loin se ramifient beaucoup et se disposent en cercle *(Lupinus)*. Parfois l'initiale présente trois faisceaux très espacés, qui, en se ramifiant et en se soudant d'une façon particulière, produisent un anneau *(Anagyris, Cytisus, Glycyrrhiza, Indigofera, Cassia)*. Quelquefois ces trois faisceaux initiaux se fusionnent en un anneau ininterrompu, qui plus loin se morcelle en trois fragments *(Colutea arborescens)* ou en un plus grand nombre *(Robinia pseudo-Acacia)*. Chez le *Dalbergia latisiliqua*, le système libéro-ligneux a la forme d'un C à l'initiale et d'un anneau à la caractéristique.

Dans tous les cas que nous venons de passer en revue, l'initiale présente des faisceaux distincts; il peut arriver aussi qu'elle possède un anneau libéro-ligneux ininterrompu; mais tantôt cet anneau se dissocie plus loin en faisceaux qui s'écartent beaucoup les uns des autres *(Psoralea, Apios, Phaseolus, Erythrina)*; tantôt, au

contraire, l'anneau persiste dans toute la longueur du pétiole *(Glycine, Sophora, Toluifera, Ceratonia, Acacia Julibrissin)*.

Le système libéro-ligneux du *Cercis siliquastrum* offre une disposition très curieuse et tout à fait spéciale à cette plante. Il en est de même pour le *Bauhinia racemosa.*

En résumé, nous voyons qu'à la caractéristique, les faisceaux sont distincts et disposés en arc dans les herbes annuelles et de petite taille, comme les *Trifolium;* distincts, mais disposés en anneau, dans les herbes vivaces, de taille élevée *(Galega officinalis)*, ou dans les plantes annuelles grimpantes *(Phaseolus)*. Ils forment dans certains arbrisseaux un anneau composé de trois gros fragments bien séparés *(Amorpha fruticosa, Glycyrrhiza glabra);* un anneau ininterrompu ou formé de faisceaux accolés, dans les arbres *(Robinia, Toluifera, Acacia)* ou dans les plantes ligneuses grimpantes *(Glycine sinensis)*.

On peut grouper en quatre classes les différentes dispositions du système libéro-ligneux chez les Légumineuses.

Faisceaux libéro-ligneux distincts à la caractéristique	1° Distincts	à l'initiale.
	2° Soudés	
Faisceaux libéro-ligneux soudés à la caractéristique	3° Distincts	
	4° Soudés	

Aux deux premières classes appartiennent les plantes herbacées, aux deux dernières les plantes ligneuses.

GÉRANIACÉES.

Geranium rotundifolium L. (Pl. I, fig. 10, et pl. IV, fig. 37-39.)

$L = 75^{mm}$; $l = 1^{mm}2$; $e = 1^{mm}$. — Poils de deux sortes : 1° subulés de $0^{mm}6$; 2° glanduleux. La caractéristique (pl. IV, fig. 39) est rhomboïdale, arrondie, un peu aplatie à sa partie supérieure. L'hypoderme ne comprend qu'une assise de cellules collenchymateuses. Le tissu conjonctif est formé de cellules rondes, à parois minces, peu méatiques; les mâcles font défaut : à cet égard le *G. rotundifolium* fait exception parmi les Géraniacées. Il existe quatre faisceaux à peu près d'égale grandeur et

disposés en croix. Le sclérenchyme fait défaut à la caractéristique, mais on en voit sur des coupes antérieures.

Le système libéro-ligneux débute par trois faisceaux (pl. I, fig. 10, et pl. IV, fig. 37): un médian inférieur, M, et deux latéraux, D, G; ceux-ci émettent bientôt deux faisceaux *d*, *g* (pl. IV, fig. 38), qui se rapprochent peu à peu du milieu du pétiole et finissent par se souder (30^{mm}) en un faisceau unique, médian, supérieur I.

Geranium robertianum L.

$L = 70^{mm}$; $l = 1^{mm}18$; $e = 1^{mm}15$. — Poils subulés de 3^{mm}, et poils glanduleux. La caractéristique présente les mêmes caractères que la précédente : le tissu conjonctif renferme des mâcles d'oxalate de chaux; le système libéro-ligneux y est disposé de la même façon.

Le parcours des faisceaux est identique à celui de l'espèce précédente, mais ici les faisceaux médians supérieurs ne se réunissent qu'au voisinage de la caractéristique.

Geranium sanguineum L.

$L = 20^{mm}$; $l = 1^{mm}19$; $e = 0^{mm}99$. — Poils unicellulaires de 2^{mm}, et poils ganduleux de 65 μ. La membrane externe est épaisse (15 μ). L'hypoderme comprend quatre assises de cellules collenchymateuses. Le tissu conjonctif contient des cristaux. Il existe comme précédemment quatre faisceaux libéro-ligneux.

Les faisceaux offrent le même parcours que dans le *G. rotundifolium :* les médians supérieurs se réunissent à 10^{mm}. Ces faisceaux dépourvus de sclérenchyme à la caractéristique en présentent sur des coupes antérieures.

Geranium Wellichianum. (Pl. IV, fig. 45.)

$L = 225^{mm}$; $l = 3^{mm}2$; $e = 2^{mm}7$. — A l'initiale on trouve trois faisceaux : les deux latéraux donnent naissance comme précédemment à deux faisceaux supérieurs qui se soudent en un faisceau médian vers 200^{mm} et à deux faisceaux intercalaires.

Monsonia angustifolia.

L = 15^{mm}; *l* = 0^{mm}96; *e* = 0^{mm}82. — Petits poils unicellulaires; grands poils unisériés et poils glanduleux. La caractéristique ne diffère guère de celle des *Geranium*. On y trouve quatre faisceaux disposés en croix.

Le parcours des faisceaux est le même que dans le genre *Geranium*.

Erodium gruinum L. (Pl. IV, fig. 40-41.)

L = 60^{mm}; *l* = 2^{mm}57; *e* = 1^{mm}84. — Poils de 3^{mm}5 unisériés, formés de deux ou trois cellules. La caractéristique est légèrement polygonale. Il n'y a pas d'hypoderme. Le tissu conjontif formé de cellules rondes méatiques renferme des grains d'amidon et des mâcles; il présente deux ou trois lacunes centrales. Le système libéro-ligneux se compose de quatre faisceaux principaux, homologues des quatre faisceaux des *Geranium*, et de quatre petits faisceaux intercalaires. On y trouve un peu de sclérenchyme, notamment au pôle libérien du faisceau inférieur.

L'initiale nous présente la même disposition des faisceaux, sauf que le faisceau médian supérieur est remplacé par deux petits faisceaux qui ne tardent pas à se réunir.

On remarquera qu'abstraction faite des faisceaux intercalaires, la disposition et le parcours des faisceaux sont sensiblement les mêmes que dans les *Geranium;* seulement les faisceaux *d* et *g* (pl. IV, fig. 40) qui apparaissent dès l'initiale chez l'*Erodium gruinum,* ne se montrent que plus loin chez les *Geranium*.

Erodium cicutarium l'Hér.

L = 35^{mm}; *l* = 1^{mm}1; *e* = 0^{mm}9. — Poils unicellulaires de 400 μ et poils glanduleux. La caractéristique est cordiforme; il existe sous l'épiderme une assise de cellules collenchymateuses. Les cellules du tissu conjonctif renferment des mâcles et des grains d'amidon. Le système libéro-ligneux est disposé comme dans l'*E. gruinum,* mais il ne se compose que de six faisceaux au

lieu de huit, les deux faisceaux intercalaires supérieurs faisant défaut.

Erodium ciconium Willd.

L = 85^{mm}; l = 1^{mm}98; e = 1^{mm}6. — Poils glanduleux de 300 μ en moyenne, certains peuvent atteindre exceptionnellement 2^{mm}. La caractéristique est un triangle curviligne. On trouve une ou deux assises de collenchyme. La disposition du système libéro-ligneux est encore la même que dans l'*E. gruinum;* il n'y a qu'une petite différence : les faisceaux intercalaires supérieurs sont au nombre de quatre au lieu de deux.

Pelargonium hederæfolium. (Pl. VI, fig. 42-43.)

L = 50^{mm}; l = 1^{mm}8; e = 1^{mm}5. — Poils de 70 μ, à parois épaisses et poils glanduleux pédicellés. La caractéristique est rhomboïdale, arrondie. L'hypoderme se compose d'une assise de collenchyme. Le parenchyme cortical comprend cinq assises de cellules, un peu aplaties dans le sens radial et dépourvues de méats; il renferme des mâcles. Les faisceaux libéro-ligneux sont au nombre de sept, un central et six périphériques dont deux petits intercalaires. Ces faisceaux sont appliqués contre un péricycle peu épais de fibres scléreuses qui séparent le parenchyme cortical du tissu médullaire. Celui-ci se compose de cellules elliptiques ou rondes un peu méatiques, présentant quelques mâcles.

Ce qui différencie le système libéro-ligneux du *P. hederæfolium* de celui des *Erodium*, c'est l'existence d'un faisceau central. Supprimons par la pensée ce faisceau, et nous aurons le système de l'*E. cicutarium.* L'étude du parcours des faisceaux va nous montrer en effet la liaison intime qui existe, à ce point de vue, entre les *Pelargonium*, les *Erodium* et les *Geranium.*

Dans le *P. hederæfolium,* le système libéro-ligneux débute par trois faisceaux G, M, D (pl. IV, fig. 42-43). Le médian inférieur donne immédiatement naissance aux faisceaux intercalaires *d*, *g*; tandis que les faisceaux latéraux se divisent et forment deux groupes de trois faisceaux. Dans chaque groupe, un faisceau ne

change pas de place (ce sont les faisceaux D et G de la caractéristique); un autre se porte vers le centre du pétiole et en se soudant avec son symétrique (3^{mm}) forme le faisceau O; le troisième, tout en restant à la même hauteur, se dirige vers le plan médian, se soude également avec son symétrique (15^{mm}) et forme le faisceau I.

La différence observée dans le système libéro-ligneux des *Geranium* et des *Pelargonium* provient de ce que les faisceaux G et D émettent chacun une branche dans le premier cas, deux dans le second (les deuxièmes branches se réunissent pour former un faisceau central).

Pelargonium odoratissimum.

$L = 80^{mm}$; $l = 2^{mm}07$; $e = 1^{mm}7$. — Poils de deux sortes : les uns subulés, pouvant atteindre $0^{mm}5$; les autres glanduleux, pédicellés. La caractéristique est cordiforme. On y trouve, comme dans l'espèce précédente, un faisceau central; les faisceaux périphériques sont disposés de la même manière. Il existe en outre deux petits faisceaux supérieurs intercalaires : par conséquent, le *P. odoratissimum* a le même nombre de faisceaux périphériques que l'*E. gruinum*.

Le *P. zonale* (pl. IV, fig. 44) se distingue des précédents par un plus grand nombre de faisceaux intercalaires.

Résumons en quelques mots la description du parcours des faisceaux libéro-ligneux dans les quatre genres que nous venons d'étudier.

Dans le genre *Geranium*, le système libéro-ligneux débute par trois faisceaux; les deux latéraux émettent deux fascicules qui se rejoignent pour former un faisceau médian supérieur.

Dans le genre *Monsonia*, nous trouvons un parcours identique.

Dans les *Pelargonium*, le système libéro-ligneux débute aussi par trois faisceaux; mais les deux latéraux émettent non plus deux, mais quatre fascicules; deux de ces fascicules se rejoignent, comme dans les *Geranium*, pour former un faisceau médian supérieur. Quant aux deux fascicules supplémentaires, ils se diri-

gent vers le centre de la moelle et s'y fusionnent en un faisceau unique.

Enfin, les *Erodium* diffèrent des *Geranium* parce que les deux fascicules supérieurs sont, dès l'initiale, séparés des faisceaux latéraux.

Si nous comparons seulement les caractéristiques, nous retrouvons dans toutes quatre faisceaux principaux, disposés en croix. D'ordinaire, il n'y en a pas d'autres dans les genres *Geranium* et *Monsonia,* et ils sont dépourvus de péricycle scléreux. On trouve, au contraire, des faisceaux intercalaires dans les *Erodium* et les *Pelargonium;* ceux-ci diffèrent des *Erodium* par la présence d'un faisceau central et l'existence d'un péricycle scléreux.

J'indiquerai encore, parmi les caractères communs aux Géraniacées, l'existence de mâcles d'oxalate de chaux, de poils glanduleux et ordinaires. Le collenchyme y est nul ou peu abondant.

TROPÆOLÉES.

Tropæolum majus L. (Pl. IV, fig. 51-52.)

$L = 160^{mm}$; $l = 2^{mm}44$; $e = 2^{mm}44$. — Poils très rares. La caractéristique est ronde. Il existe un hypoderme formé de trois ou quatre assises de cellules collenchymateuses. Les cellules médullaires, légèrement polygonales, renferment une grande quantité de grains d'amidon. On ne trouve pas de cristaux. Le système libéro-ligneux se compose de huit faisceaux (six latéraux, deux médians), disposés en cercle, les trois inférieurs sont accolés ensemble. Il n'y a pas de sclérenchyme.

Le système libéro-ligneux débute par neuf faisceaux, mais les deux supérieurs *d*, *g* se soudent vers 140^{mm} en un faisceau unique I.

Si nous comparons le système libéro-ligneux du *Tropæolum majus,* à celui de l'*Erodium gruinum,* nous voyons qu'ils ont même nombre de faisceaux à l'initiale et à la caractéristique; que, dans les deux cas, il y a soudure des deux faisceaux supérieurs de l'initiale. Il y aurait analogie complète, si les faisceaux

intercalaires de l'*Erodium* devenaient égaux aux faisceaux principaux.

OXALIDÉES.

Oxalis tetraphylla Cav. (Pl. IV, fig. 46-50.)

$L = 14^{mm} + 186^{mm}$; $l = 2^{mm}27$; $e = 1^{mm}98$. — La caractéristique est un cercle, faiblement aplati de bas en haut. La membrane externe est épaisse (10 μ). Les cellules corticales sont grandes, arrondies, méatiques. On y trouve des mâcles. Le système libéro-ligneux forme un anneau, qui renferme dans son intérieur deux faisceaux. Il n'y a pas de sclérenchyme.

Le système libéro-ligneux débute par neuf faisceaux (pl. IV, fig. 46); les deux supérieurs D_3, G_3 se soudant à leurs voisins respectifs D_2, G_2, il n'en reste plus que sept (12^{mm}). Plus loin (13^{mm}) (fig. 47) nous voyons les faisceaux *d* et *g* se diriger vers la partie supérieure du pétiole et se souder avec les faisceaux D_2 et G_2, qui se déplacent et de latéraux deviennent supérieurs (14^{mm}) (fig. 48). Nous sommes arrivés à l'extrémité de la gaine, à cette tranche du pétiole que j'ai appelée *pseudo-initiale*. Nous voyons que les faisceaux y ont une disposition symétrique. A mesure qu'on s'approche du limbe, on voit les deux faisceaux D_2 et G_2 se rapprocher, et finalement se souder (fig. 49). Les trois faisceaux inférieurs se rejoignent également, et émettent à leurs points de contact *a* et *e* deux faisceaux qui se portent à l'intérieur du cercle formé par la coalescence des faisceaux périphériques.

Voyons si l'on ne peut rattacher le parcours des faisceaux de cet *Oxalis* à celui des *Erodium*, à l'*E. gruinum*, par exemple. D'abord il faut faire abstraction des faisceaux intra-médullaires, qui dans l'*Oxalis tetraphylla* n'apparaissent que tout à fait à l'extrémité du pétiole, et qui n'existent même pas dans l'*Oxalis latifolia* que nous étudierons tout à l'heure. Comparons maintenant l'initiale de l'*E. gruinum* (pl. IV, fig. 40) avec la pseudo-initiale de l'*Oxalis tetraphylla* (pl. IV, fig. 48) : nous voyons qu'elles renferment toutes deux cinq faisceaux principaux. Il existe en

plus dans l'*E. gruinum* quatre petits faisceaux intercalaires, mais nous savons que ces faisceaux intercalaires des *Erodium* sont des faisceaux accessoires, dont le nombre varie suivant les espèces. Dans l'*Oxalis tetraphylla* aussi bien que dans l'*Erodium gruinum*, les deux faisceaux principaux supérieurs se fusionnent. A partir de là, il ne se produit plus de changements dans l'*Erodium*, tandis que chez l'*Oxalis* tous les faisceaux se soudent en anneau.

Oxalis latifolia H. B.

L = 13^{mm} + 157^{mm}; *l* = 1^{mm}86; *e* = 1^{mm}65. — Poils peu nombreux. La caractéristique est un cercle déprimé et ombiliqué à sa partie supérieure. L'*O. latifolia* ressemble beaucoup à l'*O. tetraphylla;* il en diffère parce qu'il ne possède pas de faisceaux intra-médullaires, parce que ses faisceaux ne se soudent pas en anneau ininterrompu; les trois faisceaux inférieurs et les deux faisceaux supérieurs forment deux groupes distincts.

BALSAMINÉES.

Impatiens glanduligera Arn. (Pl. IV, fig. 53.)

L = 15^{mm}; *l* = 2^{mm}47; *e* = 2^{mm}04. — Poils nuls. L'hypoderme comprend trois ou quatre assises de collenchyme bien caractérisé. Le parenchyme cortical se compose de cellules rondes, méatiques, à parois minces; il présente au centre une grande lacune; il renferme des raphides. Le système libéroligneux se compose de trois faisceaux disposés en demi-cercle, dont les extrémités se recourbent dans la direction du diamètre. On observe la même disposition à l'initiale. Si nous la comparons à celle des *Geranium*, nous voyons qu'elles possèdent chacune trois faisceaux: mais tandis que, dans les *Geranium*, les faisceaux latéraux émettent deux nouveaux faisceaux, qui s'en détachent complètement et se portent sur le côté supérieur du pétiole; dans l'*Impatiens*, les faisceaux latéraux ne se ramifient point, bien que leur contour anguleux semble indiquer qu'ils se composent de deux faisceaux accolés (G *g*, D *d*), mais inséparables.

MALVACÉES.

1° MALVÉES.

Althæa officinalis L. (Pl. IV, fig. 54-55.)

$L = 30^{mm}$; $l = 1^{mm}8$; $e = 1^{mm}74$. — Poils glanduleux de 40 μ, et poils étoilés. Hypoderme collenchymateux. Le parenchyme cortical se compose de cellules rondes, méatiques; il en est de même du parenchyme médullaire. Ces deux tissus renferment des mâcles. Le système libéro-ligneux comprend quatre faisceaux distincts, mais accolés et formant un anneau. Ils sont munis de fibres non sclérifiées.

Le système libéro-ligneux débute comme celui de l'*Erodium cicutarium;* ici encore les deux faisceaux supérieurs *d*, *g* finissent par se souder en un seul faisceau médian I. Mais tandis qu'il ne se produit pas d'autres modifications dans l'*Erodium cicutarium* et que les faisceaux demeurent distincts les uns des autres, nous voyons au contraire chez l'*Althæa officinalis* les faisceaux intercalaires *d'*, *g'* se souder aux faisceaux latéraux; il ne reste plus alors que quatre faisceaux qui s'élargissent et se rapprochent jusqu'au contact; c'est ce rapprochement des faisceaux qui distingue la caractéristique de l'*A. officinalis* de celle des *Geranium*.

Althæa rosea D. C. (Pl. IV, fig. 56.)

$L = 40^{mm}$; $l = 5^{mm}2$; $e = 5^{mm}$. — Poils étoilés. La caractéristique est plus arrondie que dans l'espèce précédente. Il existe un hypoderme comprenant cinq ou six assises de collenchyme. Le système libéro-ligneux offre sensiblement la même disposition que celui de l'*A. officinalis*. Il en diffère, parce qu'à l'initiale les deux faisceaux médians supérieurs sont déjà soudés en un faisceau unique; à la caractéristique les faisceaux intercalaires *d'*, *g'* ne sont pas fusionnés avec leurs voisins.

Lavatera arborea L. (Pl. IV, fig. 57.)

$L = 75^{mm}$; $l = 3^{mm}7$; $e = 3^{mm}5$. — Poils étoilés. La caractéristique est un cercle aplati en dessus. Le système libéro-ligneux est disposé en anneau.

Nous retrouvons à l'initiale les homologues des faisceaux *D*, *M*, *G*, *d*, *g* de l'*Althæa officinalis*, mais ici on compte entre les faisceaux D et M quatre faisceaux intercalaires au lieu d'un; de même entre les faisceaux M et G.

Lavatera hispida Desf.

Le pétiole de ce *Lavatera* diffère du précédent, parce que les faisceaux *d* et *g* sont soudés ensemble à l'initiale, et parce qu'il ne possède que deux faisceaux intercalaires.

Malva sylvestris L. (Pl. IV, fig. 79.)

$L = 125^{mm}$; $l = 2^{mm}7$; $e = 2^{mm}5$. — Poils glanduleux et poils étoilés. La caractéristique a la forme d'un cercle, qui présente une faible échancrure à sa partie supérieure. Le système libéro-ligneux est disposé en anneau continu. On trouve dans son intérieur des fibres épaisses; il en existe aussi à sa périphérie, qui sont elles-mêmes enveloppées par deux assises amylifères.

L'initiale offre le même nombre de faisceaux que celle de l'*Althæa officinalis*, c'est-à-dire sept. A part les deux faisceaux supérieurs qui se soudent immédiatement, les autres restent distincts dans la plus grande partie du pétiole : à 122^{mm}, ils sont encore bien séparés, et les fibres épaisses intra-médullaires que j'ai signalées à la caractéristique, n'existent pas encore.

Malva rotundifolia L. (Pl. IV, fig. 58.)

$L = 140^{mm}$; $l = 1^{mm}8$; $e = 2^{mm}$. — Poils glanduleux et poils étoilés. Le parenchyme cortical se compose de cellules rondes à petits méats; on y rencontre des mâcles. Comme dans l'espèce précédente, le système libéro-ligneux forme un anneau, doublé extérieurement et intérieurement de fibres à parois épaisses non lignifiées; le centre de l'anneau est occupé par du parenchyme médullaire, renfermant quelques mâcles. On ne retrouve pas en dehors de l'anneau les deux assises amylifères que j'ai signalées dans le *M. sylvestris*.

Le système libéro-ligneux débute par six faisceaux disposés comme dans l'*Althæa rosea*.

Anoda hastata Cav.

L = 16mm; *l* = 1mm65; *e* = 1mm75. — Poils unicellulaires de 3mm et poils glanduleux, sessiles. La caractéristique représente une ellipse déprimée à sa partie supérieure. On n'y trouve pas de collenchyme. Le système libéro-ligneux est disposé en anneau. Le bois est divisé en deux parties : une supérieure et l'autre inférieure beaucoup plus importante ; toutes deux sont enveloppées dans une gaine commune de fibres épaisses.

Le système libéro-ligneux débute par quatre faisceaux, disposés comme dans la caractéristique des *Geranium*. Le supérieur reste libre, les trois autres se soudent.

Abutilon Avicennæ Gœrtn.

L = 140mm; *l* = 4mm; *e* = 3mm. — Poils de trois sortes : 1° étoilés; 2° glanduleux, sessiles; 3° glanduleux, pédicellés, de 0mm5 en moyenne. La caractéristique est une ellipse à grand axe horizontal. On y trouve un hypoderme formé de six ou sept assises de cellules collenchymateuses. Comme dans les Malvées, que nous avons étudiées jusqu'à présent, le parenchyme cortical renferme des mâcles; on en trouve également dans la moelle. Le système libéro-ligneux se compose de huit faisceaux accolés et disposés en anneau.

A la base du pétiole, la disposition des faisceaux rappelle celle que nous avons trouvée à l'initiale de l'*Erodium gruinum;* seulement dans l'*A. Avicennæ,* les deux faisceaux médians supérieurs sont soudés ensemble, tandis que dans l'*Erodium gruinum,* ils sont séparés et ne se soudent que plus haut.

2° HIBISCÉES.

Hibiscus rosa-sinensis (Pl. IV, fig. 60.)

L = 40mm; *l* = 1mm8; *e* = 1mm75. — La caractéristique est un cercle légèrement aplati à la partie supérieure. L'hypoderme comprend trois ou quatre assises de cellules collenchymateuses, qui sont séparées de l'épiderme par une assise de cellules rondes,

renfermant en général des mâcles d'oxalate de chaux. On trouve encore des mâcles dans le parenchyme cortical et dans le parenchyme médullaire, tous deux formés de cellules rondes méatiques. Le système libéro-ligneux est disposé suivant un triangle à sommets arrondis. On trouve en dehors du liber quelques fibres scléreuses; elles sont beaucoup plus nombreuses dans la portion moyenne du pétiole, elles manquent à la base.

A l'initiale, les faisceaux sont disposés comme chez l'*Althœa rosea :* par conséquent il y en a six; écartés d'abord les uns des autres, ils se rapprochent insensiblement (à 20^{mm} ils sont encore bien distincts), puis finissent par se fusionner.

Hibiscus syriacus L.

$L = 9^{mm}$; $l = 1^{mm}6$; $e = 1^{mm}5$. — Les poils, placés principalement à la partie supérieure, sont de deux sortes : les uns unicellulaires de 75 μ; les autres glanduleux, sessiles. La caractéristique est un cercle aplati à la partie supérieure. Le parenchyme cortical est entouré d'une couche de cellules collenchymateuses. Le système libéro-ligneux a la forme d'un annèau elliptique; à sa périphérie et dans son intérieur, on trouve comme chez le ***Malva sylvestris*** des fibres épaisses non sclérifiées.

Le système libéro-ligneux débute par cinq faisceaux : les deux supérieurs se soudent presque aussitôt; il ne reste plus alors que quatre faisceaux, qui à 2^{mm} sont à peu près soudés en anneau.

Hibiscus Manihot L.

$L = 240^{mm}$; $l = 4^{mm}2$; $e = 4^{mm}$. — Petits poils glanduleux, sessiles, et poils étoilés. La caractéristique a la forme générale, que nous avons signalée dans les autres Malvacées; c'est un cercle déprimé à sa partie supérieure. Au-dessous de l'épiderme, on trouve une rangée ou deux de cellules à parois minces, contenant des mâcles d'oxalate de chaux. Ensuite, vient une couche de collenchyme de quatre ou cinq assises, entourant le parenchyme cortical à cellules polygonales. Le système libéro-ligneux est, comme précédemment, disposé en anneau. La moelle est formée

de cellules rondes, méatiques. Elle renferme, ainsi que le parenchyme cortical, des mâcles et des canaux sécréteurs.

L'initiale rappelle, par la disposition des faisceaux, la caractéristique du *Pelargonium zonale* (pl. IV, fig. 44). Bien entendu, on n'y trouve pas de faisceau intra-médullaire, et les faisceaux *f* et *f'* n'existent pas.

Gossypium herbaceum L. (Pl. IV, fig. 61.)

L = 50^{mm}; *l* = 2^{mm}83; *e* = 2^{mm}97. — Poils étoilés. Il existe une couche de cellules collenchymateuses, mais mal caractérisées. Le parenchyme cortical et le parenchyme médullaire, tous deux formés de cellules rondes, méatiques, à parois minces, renferment des mâcles d'oxalate de chaux. On trouve dans la partie moyenne du pétiole du sclérenchyme disposé aux deux pôles des faisceaux. Ceux-ci sont au nombre de quatre, ils sont très rapprochés et dessinent un anneau quadrilobé. Cette disposition rappelle celle de la caractéristique des *Geranium*. Néanmoins, dans les *Geranium* les faisceaux sont plus écartés les uns des autres.

L'initiale permet de distinguer les deux pétioles : on se rappelle que, dans les *Geranium*, le système libéro-ligneux débute par trois faisceaux, dont les deux latéraux donnent naissance un peu plus loin à deux autres faisceaux, qui se soudent ensuite en un seul faisceau médian supérieur. Dans le *Gossypium herbaceum*, on retrouve les trois faisceaux initiaux des *Geranium*, mais on constate qu'ils émettent à l'initiale même les deux faisceaux médians, et que ceux-ci se soudent immédiatement.

Ce pétiole du *Gossypium herbaceum* est intéressant, parce qu'il forme une transition entre ceux des Malvacées et des Géraniacées. Il nous montre également que le trajet des faisceaux est au fond le même dans les deux familles; seulement, dans les Malvacées, nous voyons d'abord que la formation du faisceau médian supérieur est plus rapide; ensuite que le rapprochement des faisceaux est plus grand et peut aller jusqu'à la coalescence.

3° BOMBACÉES.

Adansonia digitata.

$L = 18^{mm}$; $l = 1^{mm}98$; $e = 2^{mm}01$. — Poils nuls. La caractéristique est un cercle. Il existe une couche de collenchyme, formée de trois ou quatre assises; entre elles et l'épiderme on trouve une rangée de cellules à peu près continue, renfermant des mâcles. Le parenchyme cortical formé de cellules polygonales, méatiques, renferme des canaux sécréteurs. Le système libéro-ligneux est disposé en anneau aplati à la partie supérieure. On y trouve des fibres scléreuses, qui remplacent ici les fibres épaisses des autres Malvacées. Le liber renferme des mâcles. Les cellules médullaires ressemblent à celles du parenchyme cortical.

A l'initiale, le système libéro-ligneux a la forme d'un C formé par l'accolement de trois faisceaux. Peu à peu les extrémités du C s'allongent, se rejoignent et forment l'anneau de la caractéristique. Jusqu'à présent dans les Géraniacées et les Malvacées nous avons trouvé, au moins à l'initiale, des faisceaux distincts, mais nous avions affaire à des herbes, tandis que l'*Adansonia digitata* est un arbre : nous pouvions nous attendre à cette union hâtive des faisceaux, qui est conforme à la loi générale, que j'ai formulée déjà à différentes reprises.

Caractères communs. — MM. Bentham et Hooker divisent la famille des Malvacées en quatre tribus : Malvées, Urénées, Hibiscées et Bombacées. Les Urénées m'ont fait défaut, mais j'ai examiné des espèces appartenant aux trois autres groupes.

Le pétiole des Malvacées est d'ordinaire revêtu de poils étoilés, qui caractérisent assez bien cette famille; cependant on en trouve aussi chez les Tiliacées, et dans quelques espèces appartenant à des familles très diverses. De plus ils manquent quelquefois dans les Malvacées, par exemple dans les *Hibiscus rosa-sinensis*, *syriacus*,... etc. Outre les poils étoilés, on trouve assez souvent des poils glanduleux, rarement des poils unicellulaires. Le pétiole de l'*Adansonia digitata* et complètement glabre. Il existe toujours des cristaux sous forme de mâcles. Ce carac-

tère rapproche les Malvacées des Gruinales (Géraniacées, Oxalidées, Tropæolées).

On rencontre généralement un hypoderme collenchymateux. Le sclérenchyme est rare; nous en avons trouvé exceptionnellement chez l'*Adansonia digitata* et le *Gossypium herbaceum* (chez ce dernier il n'en existe que dans la partie moyenne du pétiole). D'ordinaire l'anneau libéro-ligneux est entouré de fibres épaisses, on en rencontre aussi parfois dans son intérieur *(Malva rotundifolia, sylvestris)*. Le parenchyme cortical et la moelle renferment chez quelques espèces (*Althæa rosea*, *Lavatera arborea*, etc.) des canaux sécréteurs du mucilage. Les Gruinales n'en possèdent pas.

Dans les Malvacées, le trajet des faisceaux est conforme à un type particulier que j'ai suffisamment décrit. C'est justement par la disposition du système libéro-ligneux qu'elles se rapprochent des Gruinales. Il y a cependant des différences. Ainsi le parcours des faisceaux chez les Malvacées est, pour ainsi dire, en avance sur celui des Géraniacées. En effet, les deux faisceaux médians supérieurs qui dans les Géraniacées ne se soudent qu'à une certaine distance de la base, quelquefois seulement à l'extrémité foliaire du pétiole *(Geranium Robertianum)*, se fusionnent au contraire très rapidement dans les Malvacées, et sont même parfois déjà réunis à l'initiale *(Anoda hastata)*, de sorte que l'initiale des Malvacées présente dans ce cas quatre faisceaux disposés en croix comme la caractéristique des Géraniacées. Mais ces faisceaux, au lieu de rester distincts comme dans les Géraniacées, poursuivent leur mouvement de concentration et la plupart du temps forment un anneau *(Malva)*.

Les faisceaux des Oxalidées semblent d'abord en retard, si je puis m'exprimer ainsi, sur ceux des Géraniacées; ce n'est qu'à une certaine distance de l'initiale, à la pseudo-initiale (terminaison de la gaine) que nous retrouvons les cinq faisceaux initiaux des Géraniacées, mais plus loin la fusion se produit non seulement entre les deux faisceaux médians supérieurs, mais entre tous les faisceaux. Nous voyons donc que les faisceaux des Oxalidées, d'abord en retard sur ceux des Géraniacées, les dépas-

sent pour ainsi dire et offrent à la caractéristique une disposition semblable à celle des Malvacées.

Le parcours des faisceaux dans l'*Adansonia digitata* diffère de celui des autres Malvacées, parce qu'on ne trouve pas au début du pétiole de faisceaux médians supérieurs. S'il en était ainsi dans toutes les Bombacées (ce que je n'ai pas pu examiner), ce serait un argument en faveur des botanistes qui font de cette tribu une famille spéciale.

STERCULIACÉES.

Sterculia acerifolia L. (Pl. IV, fig. 70.)

$L = 90^{mm}$; $l = 3^{mm}5$; $e = 3^{mm}$. — Poils nuls. La caractéristique est une ellipse. Il existe une couche épaisse de cellules collenchymateuses. Le parenchyme cortical se compose de cellules rondes à petits méats ; il en est de même du parenchyme médullaire. Ces deux tissus renferment des mâcles et des canaux sécréteurs. Le système libéro-ligneux est disposé en anneau et entouré de fibres épaisses.

A l'initiale, le système libéro-ligneux forme déjà un anneau complet.

La caractéristique du *Sterculia platanifolia* diffère de la précédente, principalement par l'existence de nombreux faisceaux intra-médullaires.

Theobroma Cacao L.

$L = 90^{mm}$. — Poils de 220 μ, unicellulaires, à parois épaisses. La caractéristique est un cercle de $2^{mm}35$. Le pétiole présente à son extrémité foliaire un renflement long de un centimètre environ. Sur une coupe faite immédiatement en avant de ce renflement, nous voyons au-dessous de l'épiderme quatre ou cinq assises de liège, qui reposent elles-mêmes sur des cellules collenchymateuses mal caractérisées. Au milieu de ces cellules se trouvent des fibres sclérifiées. Le parenchyme cortical renferme des mâcles et des canaux sécréteurs; la moelle également, mais en moins grand nombre. Il existe aussi quelques cristaux isolés.

Le système libéro-ligneux dessine un anneau entouré de fibres scléreuses.

A la caractéristique, le système libéro-ligneux forme aussi un anneau dans l'intérieur duquel on aperçoit deux faisceaux qui s'en sont détachés. Les fibres du péricycle ne sont pas sclérifiées.

Le système libéro-ligneux débute par quatre faisceaux disposés en croix, comme ceux des Malvacées.

CARACTÈRES COMMUNS. — Je n'ai pas étudié un assez grand nombre de plantes de cette famille pour donner d'une façon certaine les caractères du pétiole. Il est probable cependant qu'il doit peu différer de celui des Malvacées. Il renferme, en effet, du collenchyme, des fibres épaisses, des mâcles, des canaux sécréteurs. Le système libéro-ligneux forme un anneau à la caractéristique. A l'initiale, on trouve chez les *Sterculia* un anneau; chez le *Theobroma*, quatre faisceaux disposés comme dans les Malvacées.

Les deux Sterculiacées étudiées ici sont arborescentes. Les espèces herbacées m'ont fait défaut; leur pétiole doit probablement se rapprocher davantage de celui des Malvacées.

TILIACÉES.

1° TILIÉES.

Sparmannia Sp. (Pl. IV, fig. 65.)

L = 130^{mm}. — Poils de 2^{mm}, à parois épaisses. La caractéristique est un cercle de 4^{mm} de diamètre environ, légèrement comprimé sur les côtés. Il existe à la périphérie une couche de collenchyme. Le parenchyme cortical est formé de cellules polygonales, méatiques, à parois un peu épaisses; on y trouve, ainsi que dans le parenchyme médullaire, des mâcles et des canaux sécréteurs. Le système libéro-ligneux est disposé en anneau quadrilobé.

A l'initiale le système libéro-ligneux a la même disposition que chez l'*Althæa officinalis;* comme dans cette espèce, les deux faisceaux supérieurs finissent par se souder, de manière à consti-

tuer un faisceau unique. Les faisceaux intercalaires inférieurs se soudent à leurs voisins, et il ne reste plus que quatre faisceaux qui se rapprochent et s'accolent pour former un anneau.

Il faut remarquer qu'il n'existe pas de fibres scléreuses à l'initiale, ni à la caractéristique; mais on en trouve dans la portion moyenne du pétiole.

Entelea arborescens. (Pl. IV, fig. 64.)

$L = 110^{mm}$. — La caractéristique est un cercle de $5^{mm}5$ de diamètre environ. L'épiderme repose sur deux assises de petites cellules à parois minces et renfermant des mâcles d'oxalate de chaux. Au-dessous, on trouve d'abord une dizaine de rangées de cellules collenchymateuses, plus grandes que les cellules précédentes; puis le parenchyme cortical à cellules polygonales arrondies. Ce dernier tissu renferme quelques mâcles et des canaux sécréteurs. Le système libéro-ligneux dessine un anneau continu entouré de fibres épaisses non sclérifiées. Le liber contient des mâcles. Les cellules médullaires sont grandes, polygonales, à parois minces. La moelle renferme des mâcles et des canaux sécréteurs.

A l'initiale, la disposition des faisceaux libéro-ligneux est la même que dans le *Sparmannia*.

Entelea palmata Lindl. (Pl. IV, fig. 62-63.)

$L = 30^{mm}$; $l = 1^{mm}70$; $e = 1^{mm}70$. — La caractéristique est à peu près ronde, légèrement aplatie à la partie supérieure. Ce pétiole, de dimensions plus petites que le précédent, présente avec lui quelques légères différences de structure : ainsi il n'existe pas entre l'épiderme et le collenchyme de cellules mâclifères; l'anneau libéro-ligneux est légèrement fendu à sa partie supérieure et renferme deux petits faisceaux intra-médullaires. Mais, comme chez l'*E. arborescens*, on trouve des canaux sécréteurs dans les parenchymes cortical et médullaire, des mâcles dans le tissu conjonctif et dans le liber.

Corchorus textilis Del.

$L = 10^{mm}$. — L'épiderme est muni de poils. La caractéristique a la forme d'un triangle curviligne à sommet supérieur. On

trouve à la périphérie une couche de cellules collenchymateuses. Les cellules corticales ont des parois très minces, elles englobent de nombreux canaux sécréteurs; quelques-unes renferment des mâcles. Le système libéro-ligneux est disposé en anneau plus épais en bas qu'en haut. Cet anneau est entouré et rempli de fibres à parois épaisses.

Le système libéro-ligneux débute par trois faisceaux qui se soudent en croissant et dont les extrémités finissent par se rejoindre.

Corchorus olitorius L. (Pl. IV, fig. 65.)

L = 45^{mm}. — On trouve des poils sur la face supérieure du pétiole. La caractéristique a la forme d'un cercle de $2^{mm}3$ de diamètre. Les différents tissus présentent les mêmes caractères que dans l'espèce précédente. Ici les mâcles sont plus abondantes. L'anneau libéro-ligneux plus épais en bas qu'en haut, comme le précédent, est plus dilaté et renferme quelques cellules de parenchyme à parois minces. On y trouve aussi un petit faisceau intra-médullaire.

Le système libéro-ligneux débute comme dans l'espèce précédente.

Bien que la caractéristique ne présente que des fibres épaisses, on trouve des fibres scléreuses sur les coupes antérieures.

Tilia sylvestris Desf. (Pl. IV, fig. 67.)

L = 30^{mm}; $l = 1^{mm}68$; $e = 1^{mm}78$. — Poils simples de 400 μ, et poils étoilés. La caractéristique est elliptique. Il existe un hypoderme collenchymateux. Le parenchyme cortical est formé de cellules polyédriques, à méats très petits; il renferme de nombreux canaux sécréteurs, et contient ainsi que l'hypoderme des mâcles d'oxalate de chaux. Le système libéro-ligneux forme un anneau entouré de fibres épaisses; on voit dans son intérieur un faisceau dont nous allons apprendre l'origine.

Le système libéro-ligneux débute, comme celui des *Olitorius*, par trois faisceaux. On voit d'abord deux de ces faisceaux se souder. Le système libéro-ligneux se compose alors de deux arcs, qui gran-

dissent et dont les extrémités finissent par se toucher : de ces deux points de contact, partent des fascicules qui se réunissent au centre de l'anneau.

2° ÉLÆOCARPÉES.

Aristotelia Maqui L'Hérit. (Pl. IV, fig. 68.)

$L = 21^{mm}$; $l = 2^{mm}5$; $e = 1^{mm}5$. — Poils nuls. La caractéristique a la forme d'une ellipse échancrée à sa partie supérieure. La membrane externe a une épaisseur de 10 μ. Le parenchyme cortical, entouré d'un hypoderme collenchymateux, est formé de cellules rondes, à petits méats, et contient des mâcles. La portion principale du système libéro-ligneux comprend un arc de cercle et deux faisceaux disposés suivant sa corde. Il existe de plus deux petits faisceaux latéro-supérieurs. On trouve quelques fibres épaisses sur le côté convexe de l'arc de cercle.

Le trajet des faisceaux appartient au type que nous avons rencontré bien souvent dans les Légumineuses (pl. I, fig. 2) et plus particulièrement à celui de l'*Indigofera Dosua*. Comme dans cette espèce, le système libéro-ligneux débute par trois faisceaux, qui donnent naissance à deux autres faisceaux de la manière que j'ai décrite en parlant des Légumineuses; mais ici ces deux faisceaux restent libres et constituent les faisceaux *d* et *g* de la caractéristique; de plus, les faisceaux latéraux, qui finissent par se souder au médian pour former l'arc de cercle, émettent vers 10^{mm} deux fascicules *d'* et *g'* qui se portent à la partie supérieure.

Caractères communs. — Comme les Sterculiacées, les Tiliacées ont avec les Malvacées un grand nombre de caractères communs. Leur pétiole, en effet, renferme des mâcles, du collenchyme hypodermique, des fibres épaisses, des canaux sécréteurs (ils paraissent plus fréquents chez les Tiliacées que chez les Malvacées). On trouve même des poils étoilés chez les *Tilia* et *Entelea*.

Quant au système libéro-ligneux, il se montre à la caractéristique, disposé en anneau comme chez les Malvacées. Mais cet anneau est souvent ouvert à sa partie supérieure (*Corchorus, Entelea*); de plus, le trajet des faisceaux ne présente pas

d'ordinaire le type si net que nous avons rencontré dans les Malvacées. Quelquefois même, il offre un type tout à fait différent *(Aristotelia Maqui)*. Cependant chez le *Sparmannia* et l'*Entelea arborescens* le parcours des faisceaux ressemble à celui des Malvacées.

CRUCIFÈRES.

1° ARABIDÉES.

Barbarea vulgaris R. Br. (Pl. V, fig. 1.)

L = 70^{mm}; l = 2^{mm}07; e = 1^{mm}74. — Poils nuls. La caractéristique a la forme d'un demi-cercle surmonté de deux éminences. La membrane externe est épaisse (10 μ). Le parenchyme cortical est formé de cellules rondes ou elliptiques, à parois minces. Le système libéro-ligneux est composé de neuf faisceaux dont le plus important est médian inférieur. Les huit autres sont disposés symétriquement des deux côtés du pétiole. On trouve quelques fibres faiblement sclérifiées appliquées entre le liber du faisceau médian. Il n'existe pas de cristaux.

Le système libéro-ligneux présente à l'initiale la même disposition qu'à la caractéristique. Seulement on n'y trouve que sept faisceaux, les deux supérieurs n'apparaissent que plus loin. Tous ces faisceaux possèdent des fibres fortement sclérifiées.

2° ALYSSINÉES.

Cochlearia Armoracia L.

L = 300^{mm}; l = 5^{mm}5; e = 6^{mm}. — Poils nuls. On trouve un hypoderme collenchymateux formé de trois à cinq assises. Le tissu conjonctif se compose de cellules rondes qui dans la portion centrale du pétiole renferme de nombreux grains d'amidon. On n'y voit pas de cristaux. Le système libéro-ligneux comprend quinze faisceaux périphériques. Ces faisceaux ne sont pas simples : ils se composent généralement de quatre ou cinq fascicules disposés en cercle et entourés de fibres scléreuses. Nous rencontrerons dans d'autres Crucifères de pareils faisceaux; je les désignerai à l'avenir sous le nom de faisceaux *rayonnés*. (Les

fibres scléreuses peuvent être remplacées par des fibres épaisses.) En outre des quinze faisceaux périphériques, on trouve, à l'intérieur du pétiole, de petits faisceaux très grêles, et disposés sans ordre.

Le système libéro-ligneux a la même disposition à l'initiale; les faisceaux y sont un peu moins nombreux qu'à la caractéristique.

Cochlearia officinalis L. (Pl. V, fig. 2.)

$L = 75^{mm}$; $l = 2^{mm}35$; $e = 1^{mm}90$. — Poils nuls. Il n'y a pas d'hypoderme. Le tissu conjonctif dépourvu de cristaux est formé de cellules rondes offrant de grands méats et des canaux aérifères. Cette structure lâche du tissu conjonctif est corrélative de l'habitat de la plante, qui se plaît dans les lieux humides et même marécageux. Le système libéro-ligneux comprend trois faisceaux : un médian principal, et deux latéraux beaucoup plus petits. Ces faisceaux n'ont pas de sclérenchyme.

Le système libéro-ligneux ne comprend qu'un faisceau à l'initiale.

3° SISYMBRIÉES.

Sisymbrium officinale L. (Pl. V, fig. 3.)

$L = 10^{mm}$; $l = 2^{mm}3$; $e = 1^{mm}8$. — Poils rares, on en trouve quelques-uns dans la gouttière supérieure. La membrane externe est épaisse (20 μ). L'hypoderme est nul. Le tissu conjonctif est formé de grandes cellules rondes ou elliptiques, présentant de grands méats. On n'y trouve pas de cristaux. Le système libéro-ligneux se compose de neuf faisceaux, dont un principal inférieur. Il n'y a pas de sclérenchyme.

Le système libéro-ligneux présente la même disposition à l'initiale : on y compte sept faisceaux au lieu de neuf, les faisceaux *g* et *d* n'apparaissent que plus loin.

4° BRASSICÉES.

Brassica Napus L. (Pl. V, fig. 4.)

$L = 100^{mm}$; $l = 3^{mm}2$; $e = 3^{mm}7$. — Poils nuls. L'hypoderme comprend une assise de collenchyme. Le tissu conjonctif se com-

pose de cellules polygonales, arrondies, méatiques. On n'y voit pas de cristaux. Il existe neuf faisceaux libéro-ligneux : les cinq faisceaux inférieurs sont rayonnés. Il n'y a pas de sclérenchyme.

Le système libéro-ligneux débute par trois faisceaux, les deux latéraux sont très larges et se segmentent aussitôt en trois.

Brassica oleracea L. (Pl. V, fig. 5.)

$L = 530^{mm}$; $l = 4^{mm}7$; $e = 5^{mm}$. — Poils nuls. L'hypoderme, réduit à une assise dans l'espèce précédente, forme ici une couche paisse. Il existe neuf faisceaux libéro-ligneux; les inférieurs sont rayonnés.

Sinapis incana L. (Pl. V, fig. 6.)

$L = 15^{mm}$; $l = 2^{mm}25$; $e = 2^{mm}7$. — Poils unisériés de $0^{mm}5$. On trouve quelques cellules hypodermiques à la partie inférieure. Le tissu conjonctif est formé de cellules arrondies, méatiques, dépourvues de cristaux. Le système libéro-ligneux comprend un faisceau impair inférieur et dix faisceaux disposés symétriquement. Les plus gros de ces faisceaux sont rayonnés; tous sont munis de fibres épaisses non sclérifiées.

L'initiale ne renferme que sept faisceaux, correspondant aux sept faisceaux inférieurs de la caractéristique; les autres naissent par ramification des faisceaux D et G.

Sinapis nigra L.

$L = 33^{mm}$; $l = 5^{mm}$; $e = 5^{mm}5$. — La caractéristique est pentagonale. La membrane externe varie de 10 à 15 μ. On trouve une assise hypodermique à la partie inférieure et en face de quelques faisceaux. Les cellules du tissu conjonctif situées dans l'axe du pétiole sont grandes, polygonales et à petits méats. On compte neuf faisceaux libéro-ligneux; les plus gros sont rayonnés.

5° LÉPIDINÉES.

Lepidium latifolium L. (Pl. V, fig. 7.)

$L = 70^{mm}$; $l = 4^{mm}5$; $e = 5^{mm}$. — Poils nuls. Il n'y a pas de collenchyme. Le tissu conjonctif se compose de cellules rondes,

laissant entre elles de grands méats et même des lacunes, comme c'est l'ordinaire dans les plantes aquatiques ou des lieux humides. Le système libéro-ligneux comprend onze faisceaux principaux.

6° CAKILINÉES.

Crambe cordifolia Stev. (Pl. V, fig. 8.)

$L = 320^{mm}$; $l = 9^{mm}5$; $e = 9^{mm}$. — Poils rares, unicellulaires, de $2^{mm}5$. La caractéristique est un pentagone à contours très sinueux. L'hypoderme forme une couche continue dont l'épaisseur est plus grande dans les parties saillantes. Le tissu conjonctif est formé de cellules polygonales à petits méats. Les faisceaux libéro-ligneux ne montrent pas dans leur disposition la symétrie que nous sommes habitués à rencontrer. La plupart de ces faisceaux sont rayonnés et présentent à leur périphérie aussi bien que dans leur intérieur des fibres scléreuses.

Crambe maritima L.

$L = 120^{mm}$; $l = 9^{mm}$; $e = 13^{mm}$. — Poils nuls. Il existe un hypoderme collenchymateux. Le tissu conjonctif est formé de cellules polygonales, méatiques, grandissant de la périphérie au centre; il renferme des lacunes. Le système libéro-ligneux rappelle celui du *Crambe cordifolia :* les faisceaux sont disposés un peu irrégulièrement, les plus gros sont rayonnés. Le sclérenchyme y est moins abondant que dans l'espèce précédente.

Raphanus Raphanistrum L. (Pl. V, fig. 9.)

$L = 15^{mm}$; $l = 2^{mm}2$; $e = 2^{mm}5$. — Poils de $0^{mm}5$, situés dans la gouttière supérieure. L'hypoderme est à peu près nul; on trouve cependant quelques assises de collenchyme aux côtés supérieur et inférieur. Le tissu conjonctif est formé de cellules rondes, méatiques; son centre est occupé par une grande lacune. Le système libéro-ligneux se compose de neuf faisceaux, dont les trois inférieurs sont rayonnés. Il n'y a pas de fibres scléreuses.

Le système libéro-ligneux débute par cinq faisceaux : les quatre faisceaux supérieurs n'apparaissent que plus loin; les faisceaux

D et G donnent naissance à $4^{mm}5$, aux faisceaux *d* et *g*, qui émettent à leur tour vers 6^{mm} les faisceaux *d'* et *g'*.

Raphanus Landra Mor.

$L = 20^{mm}$; $l = 2^{mm}37$; $e = 2^{mm}04$. — Poils unicellulaires de 350 μ. Le tissu conjonctif est formé de cellules rondes méatiques. Les faisceaux sont au nombre de sept : les trois inférieurs sont rayonnés. On n'y trouve pas de sclérenchyme.

L'initiale ne présente que cinq faisceaux.

Caractères communs. — La famille des Crucifères a été divisée par MM. Bentham et Hooker en dix tribus. Les espèces que j'ai étudiées se rapportent à six de ces tribus. Elles présentent les caractères suivants : le plus souvent, le pétiole ne possède pas de poils; quand ils existent, ils sont unicellulaires. Le collenchyme fait quelquefois défaut; d'ordinaire, il forme une couche mince, rarement épaisse *(Crambe cordifolia, Cochlearia Armoracia)*. Les cristaux manquent. Les faisceaux libéro-ligneux sont parfois munis de sclérenchyme, mais habituellement ce tissu est remplacé par des fibres à parois épaisses que l'on rencontre soit au pôle externe, soit aux deux pôles des faisceaux *(Sinapis incana)*. Dans le *Barbarea vulgaris* les fibres épaisses sont sclérifiées à la base du pétiole et ne le sont point à son extrémité foliaire. A la caractéristique, les faisceaux se montrent isolés, comme dans la plupart des plantes herbacées, et sont disposés symétriquement à la périphérie. On trouve parfois dans les gros pétioles quelques faisceaux centraux *(Crambe cordifolia, Cochlearia Armoracia)*. Dans bien des cas, les faisceaux des Crucifères sont rayonnés, c'est-à-dire que chaque faisceau est composé de petits fascicules très rapprochés les uns des autres et disposés suivant les rayons d'un cercle. Je n'ai retrouvé une pareille disposition qu'à la base du pétiole des *Platanus;* mais ce dernier présente trop de différence pour qu'on puisse le confondre avec le pétiole d'une Crucifère. Par conséquent la présence de faisceaux rayonnés constitue un excellent caractère de la famille qui nous occupe. Les faisceaux sont parallèles, ils sont généralement

dépourvus d'anastomoses. D'ordinaire ils sont moins nombreux à l'initiale qu'à la caractéristique, les faisceaux supérieurs offrant quelques ramifications.

PAPAVÉRACÉES

Papaver dubium L. (Pl. V, fig. 10.)

$L = 30^{mm}$; $l = 2^{mm}6$; $e = 1^{mm}9$. — Poils plurisériés de $2^{mm}6$. On trouve quelques cellules hypodermiques, aux extrémités latérales et à la partie inférieure de la caractéristique. Le tissu conjonctif est formé de cellules polygonales à parois minces, à petits méats; il est dépourvu de cristaux. Le système libéro-ligneux se compose de cinq faisceaux principaux; on en trouve deux ou trois petits, dans les expansions latérales. Il n'y a pas de sclérenchyme.

Le système libéro-ligneux présente à l'initiale le même nombre de faisceaux qu'à la caractéristique.

Chelidonium majus L. (Pl. V, fig. 11.)

$L = 65^{mm}$; $l = 3^{mm}$; $e = 2^{mm}5$. — Poils unisériés de $1^{mm}5$. La caractéristique est sinueuse à sa partie inférieure; on trouve dans ces sinuosités quelques cellules de collenchyme; il en existe également dans les pointes latérales. Les faisceaux libéro-ligneux sont au nombre de neuf; leur liber renferme des laticifères. Le centre est occupé par une grande lacune.

Le nombre et la disposition des faisceaux sont sensiblement les mêmes à l'initiale.

Eschscholtzia californica Cham. (Pl. V, fig. 12.)

$L = 50^{mm}$; $l = 2^{mm}05$; $e = 1^{mm}$. — La caractéristique a la forme d'un croissant sinueux à son bord inférieur. Au-dessous de l'épiderme on trouve une couche de cellules chlorophylliennes, qui présente une petite interruption, à la partie inférieure, où elle est remplacée par quelques cellules de collenchyme. Le tissu conjonctif se compose de cellules polygonales. On n'y voit pas de

cristaux. Il existe sept faisceaux libéro-ligneux qui sont dépourvus de sclérenchyme.

A l'initiale, on ne trouve que trois faisceaux, dont les deux latéraux donnent naissance à quatre autres par des ramifications successives.

Bocconia cordata Willd. (Pl. V, fig. 13.)

$L = 90^{mm}$; $l = 4^{mm}5$; $e = 3^{mm}5$. — Poils rares. La caractéristique est elliptique. L'hypoderme comprend quatre assises de collenchyme, on en trouve sept à la partie inférieure. Le parenchyme est formé de cellules polygonales, un peu méatiques; il est dépourvu de cristaux. Le système libéro-ligneux est disposé en arc : les faisceaux sont accolés et même soudés; on ne trouve pas de fibres scléreuses.

A l'initiale, on trouve sept faisceaux bien séparés; ils se rapprochent les uns des autres, à mesure qu'ils s'éloignent de la base du pétiole.

Caractères communs. — Comme dans les Crucifères, nous trouvons dans les Papavéracées des faisceaux isolés, disposés en arc de cercle; on y constate aussi le manque de cristaux. Mais cette dernière famille diffère de la première par l'absence habituelle de fibres épaisses, et par la présence de laticifères.

Ainsi qu'on vient de le voir, les faisceaux libéro-ligneux sont distincts, écartés les uns des autres dans les Papavéracées, qui sont généralement des herbes. Cependant chez le *Bocconia cordata*, ils sont très rapprochés les uns des autres et même soudés. Cette différence tient à ce que le *B. cordata*, bien qu'étant une plante herbacée, atteint une taille élevée.

FUMARIACÉES.

Hypecoum procumbens L.

$L = 25^{mm}$; $l = 1^{mm}22$; $e = 0^{mm}77$. — Poils nuls. Caractéristique triangulaire. Hypoderme nul. Les cellules du tissu conjonctif sont polygonales, dépourvues de cristaux. Il y a trois faisceaux libéro-ligneux; le sclérenchyme manque.

Le système libéro-ligneux est composé dans toute la longueur du pétiole de trois faisceaux parallèles.

Dicentra spectabilis D. C. (Pl. I, fig. 1.)

$L = 65^{mm}$; $l = 1^{mm}65$; $e = 1^{mm}66$. — Poils nuls. Caractéristique cordiforme. Il existe au-dessous de l'épiderme une assise discontinue de collenchyme. Le tissu conjonctif est formé de cellules polygonales; on n'y trouve pas de cristaux. Le système libéro-ligneux se compose de sept faisceaux; le sclérenchyme y est réduit à quelques fibres.

A l'initiale on trouve neuf faisceaux libéro-ligneux qui s'anastomosent ou se ramifient comme l'indique le schéma (pl. I, fig. 1).

Adlumia cirrhosa Raf.

$L = 50^{mm}$; $l = 1^{mm}15$; $e = 0^{mm}90$. — Poils nuls. Caractéristique triangulaire, arrondie. On trouve un peu de collenchyme aux sommets du triangle. Le tissu conjonctif est formé de cellules polyédriques, à méats très petits. Il y a trois faisceaux libéro-ligneux dépourvus de sclérenchyme.

Corydalis lutea D. C. (Pl. V, fig. 16.)

$L = 95^{mm}$; $l = 1^{mm}2$; $e = 1^{mm}3$. — Poils nuls. Le tissu conjonctif est formé de cellules polygonales, peu méatiques, dépourvues de cristaux. Il y a trois faisceaux libéro-ligneux.

L'initiale présente le même nombre de faisceaux; ceux-ci restent parallèles dans toute la longueur du pétiole.

Fumaria officinalis L. (Pl. V, fig. 14.)

$L = 25^{mm}$; $l = 1^{mm}3$; $e = 1^{mm}$. — Poils nuls. La caractéristique est un triangle équilatéral. Le tissu conjonctif se compose de cellules polygonales, à parois minces, laissant entre elles de petits méats. On trouve aux angles quelques cellules de collenchyme. Il existe trois faisceaux libéro-ligneux présentant un peu de sclérenchyme à leur pôle libérien.

Le système libéro-ligneux débute par trois faisceaux, qui demeurent parallèles d'un bout à l'autre du pétiole.

Fumaria parviflora Lm. (Pl. V, fig. 15.)

L = 20^{mm}; l = 1^{mm}2; e = 0^{mm}9. — La caractéristique triangulaire comme celle du *F. officinalis*, en diffère cependant par la courbure de ses côtés latéraux. Le système libéro-ligneux débute par trois faisceaux; mais un peu en avant de la caractéristique, le faisceau médian émet deux petits faisceaux (pl. V, fig. 15, *d*, *g*).

Dans le *Fumaria capreolata* (var. *Borei*), on trouve également trois faisceaux parallèles dont l'inférieur émet à 2^{mm} en avant de la caractéristique deux faisceaux.

Caractères communs. — D'après MM. Bentham et Hooker, les Fumariacées comprennent sept genres que j'ai étudiés à l'exception de deux *(Pteridophyllum, Sarcocapnos)*.

Les Fumariacées se distinguent aisément à la forme triangulaire du pétiole, au manque de cristaux. Le collenchyme y est rare; le sclérenchyme nul ou réduit à quelques fibres. Le tissu conjonctif est à parois minces. Les poils font défaut.

Le pétiole des Fumariacées se différencie de celui des Crucifères par sa forme, par l'absence de fibres épaisses; de celui des Papavéracées par sa forme également et par l'absence de laticifères.

MYRTACÉES.

Eucalyptus Sp. (Pl. V, fig. 18.)

L = 10^{mm}; l = 2^{mm}27; e = 1^{mm}7. — Poils nuls. La caractéristique est triangulaire, arrondie. Il existe une couche épaisse d'hypoderme collenchymateux. Le parenchyme cortical se compose de cellules rondes, méatiques; il renferme des mâcles et des cristaux isolés. On y trouve aussi des poches sécrétrices. Le système libéro-ligneux a la forme d'un C. Le bois est muni de liber sur ses deux faces. Le liber externe est recouvert d'une couche de sclérenchyme. La moelle, peu importante, est formée de petites cellules rondes, renfermant des mâcles et des cristaux isolés. Il faut encore signaler l'existence de deux petits faisceaux latéro-supérieurs.

La disposition du système libéro-ligneux ne varie guère dans

les différentes tranches du pétiole. A l'initiale, le système libéro-ligneux a déjà la forme d'un C, mais les deux petits faisceaux de la caractéristique n'existent pas encore; on n'y trouve pas de sclérenchyme.

Myrtus communis L. (Pl. V, fig. 19.)

L = 0mm5; *l* = 1mm; *e* = 0mm7. — Poils nuls. La caractéristique est un demi-cercle. Le parenchyme cortical se compose de cellules rondes, à parois épaisses. On y trouve, comme dans l'*Eucalyptus*, des mâcles et des poches sécrétrices. Le système libéro-ligneux se compose d'un faisceau bicollatéral, entouré de fibres scléreuses.

Punica granatum L.

L = 1mm5; *l* = 0mm8; *e* = 0mm9. — Poils nuls. Le parenchyme est formé de cellules à parois épaisses, comme dans le *Myrtus communis;* il renferme des mâcles d'oxalate de chaux. Le système libéro-ligneux se compose d'un faisceau bicollatéral en arc de cercle; il ne possède pas de sclérenchyme.

J'ai étudié trop peu de représentants de cette famille pour pouvoir en indiquer avec certitude les caractères généraux. Je me bornerai à faire remarquer que dans les trois plantes que nous avons examinées, nous avons trouvé des mâcles d'oxalate de chaux et des faisceaux bicollatéraux. Le système libéro-ligneux offre une disposition très simple; il se compose essentiellement d'un gros faisceau central, dont la section est tantôt en arc de cercle, tantôt en forme de C.

ŒNOTHÉRÉES.

Fuchsia fulgens D. C. (Pl. V, fig. 20.)

L = 25mm; *l* = 2mm30; *e* = 2mm40. — Poils unicellulaires de 0mm5. La caractéristique est une ellipse, échancrée à la partie supérieure. Le parenchyme cortical est formé de cellules arrondies à petits méats; certaines de ces cellules renferment des faisceaux de raphides. J'ai également trouvé des raphides dans deux autres

espèces de *Fuchsia :* il est probable qu'elles existent dans toutes les espèces de ce genre. Le système libéro-ligneux se compose d'un faisceau bicollatéral en forme d'U.

L'initiale a la forme d'un demi-cercle, le faisceau libéro-ligneux est en arc de cercle.

Jussiæa grandiflora Mich. (Pl. V, fig. 24.)

L = 30mm; *l* = 3mm05; *e* = 1mm65. — Pétiole velu. Le parenchyme est formé de cellules rondes laissant entre elles des canaux aérifères, comme nous l'avons déjà vu chez d'autres plantes aquatiques. On y trouve des raphides. Le système libéro-ligneux se compose d'un faisceau principal disposé en demi-cercle, et de deux faisceaux latéro-supérieurs. On trouve dans la concavité du faisceau principal des îlots de liber, qui ne sont pas en contact avec la partie ligneuse; il n'y a pas de sclérenchyme.

A l'initiale, nous retrouvons la même disposition du système libéro-ligneux; les deux petits faisceaux font défaut.

Trapa natans L.

L = 62mm; *l* = 1mm5; *e* = 1mm05. — La caractéristique est trapézoïdale. Le parenchyme est formé de cellules rondes, amylifères, laissant entre elles de larges canaux aérifères. Les cellules mâclifères font saillie à l'intérieur de ces canaux. Le système libéro-ligneux se compose d'un gros faisceau central et de deux petits faisceaux supéro-latéraux. Le faisceau central est bicollatéral, il ne possède pas de fibres sclérifiées.

On retrouve, dans toute la longueur du pétiole, trois faisceaux : réunis à l'initiale, ils sont très écartés dans la partie vésiculaire, puis ils se rapprochent de nouveau à l'extrémité terminale du pétiole.

N'ayant étudié que trois plantes de cette famille, je ne puis en faire connaître les caractères généraux. Notons seulement que le système libéro-ligneux nous a toujours présenté une disposition fort simple : il se compose essentiellement d'un faisceau bicollatéral courbé en U ou en arc de cercle.

SAXIFRAGACÉES.

1° SAXIFRAGÉES.

Saxifraga cordifolia Haw. (Pl. V, fig. 26.)

L = 10^{mm} + 45^{mm}; l = 4^{mm}7; e = 3^{mm}5. — Poils nuls. Tissu conjonctif composé de cellules rondes, à parois épaisses, laissant entre elles des canaux aérifères; on y trouve des mâcles. Le système libéro-ligneux se compose d'une vingtaine de faisceaux, les uns périphériques et disposés symétriquement; les autres centraux et disposés sans ordre. Il n'y a pas de sclérenchyme.

Heuchera americana L. (Pl. V, fig. 22.)

L = 5^{mm} + 200^{mm}; l = 1^{mm}90; e = 2^{mm}10. — On trouve quelques poils sur le pétiole. La membrane externe a une épaisseur de 15 μ. Il existe au moins une assise hypodermique. Les cellules corticales sont rondes, à parois épaisses et à petits méats; les cellules médullaires n'en diffèrent que par leur taille, elles sont plus petites. Les unes et les autres peuvent renfermer des mâcles. Le système libéro-ligneux forme un anneau trilobé; il est dépourvu de sclérenchyme.

A l'initiale, on trouve trois faisceaux espacés, qui plus loin se rapprochent les uns des autres en même temps qu'ils grandissent, et se courbent en arc de cercle; finalement ils s'accolent ensemble, de manière à former l'anneau de la caractéristique.

2° HYDRANGÉES.

Hydrangea Hortensia (Pl. V, fig. 23.)

L = 25^{mm}. — Poils nuls. La caractéristique est un cercle de 3^{mm}7 de diamètre environ, aplati à la partie supérieure. Il existe un hypoderme collenchymateux. Le parenchyme cortical et le parenchyme médullaire sont formés de cellules polyédriques à méats très petits; on y trouve des raphides. Le système libéro-ligneux forme un anneau surmonté de quatre petits faisceaux latéraux. Le sclérenchyme manque.

Le système libéro-ligneux débute par trois faisceaux, qui for-

ment un anneau, comme je l'ai décrit chez le *Cytisus Laburnum*. Quant aux petits faisceaux latéraux, ils prennent naissance à la partie supérieure de l'anneau.

Philadelphus coronarius L. (Pl. V, fig. 24.)

$L = 5^{mm}$; $l = 1^{mm}5$; $e = 1^{mm}8$. — Poils unicellulaires de $0^{mm}9$. Il existe un hypoderme collenchymateux principalement dans les parties inférieure et supérieure de la caractéristique. Le parenchyme, formé de cellules rondes à parois un peu épaisses, renferme des mâcles. Le système libéro-ligneux se compose d'un arc de cercle trilobé surmonté de deux faisceaux. Le sclérenchyme fait défaut.

Le système libéro-ligneux débute par trois faisceaux qui, à 1^{mm}, se soudent en arc dont les extrémités émettent deux faisceaux.

3° ESCALLONIÉES.

Escallonia floribunda H. et B. (Pl. V, fig. 25.)

$L = 4^{mm}$; $l = 1^{mm}7$; $e = 1^{mm}$. — Poils unicellulaires de 50 μ. La caractéristique a la forme d'une demi-lune. L'hypoderme comprend deux ou trois assises de collenchyme. Les cellules corticales sont rondes, méatiques; certaines contiennent des mâcles. On ne trouve qu'un seul faisceau libéro-ligneux, large et épais, légèrement concave vers le haut. Il existe à son bord convexe quelques fibres à parois épaisses.

4° RIBÉSIÉES.

Ribes rubrum L.

$L = 50^{mm}$; $l = 1^{mm}7$; $e = 1^{mm}7$. — Poils unicellulaires de 150 μ. La caractéristique est triangulaire, arrondie. Il existe une assise de cellules hypodermiques. Le parenchyme cortical est formé de cellules polygonales, arrondies; il renferme de nombreuses mâcles. Le système libéro-ligneux est disposé en anneau trilobé, comme celui de l'*Heuchera americana*. Les cellules médullaires, rondes, méatiques, renferment des mâcles.

L'initiale présente trois faisceaux : d'abord disposés en arc, ils forment ensuite un anneau, comme dans l'*Heuchera americana*.

Ribes nigrum L.

$L = 80^{mm}$; $l = 2^{mm}3$; $e = 1^{mm}9$. — Poils unicellulaires de 500 μ; ils sont plus nombreux à la face supérieure. La caractéristique est triangulaire comme dans le *R. rubrum*. Le système libéro-ligneux forme également un anneau trilobé.

Caractères communs. — MM. Bentham et Hooker divisent cette famille en six tribus : les espèces que j'ai étudiées, se rapportent à quatre de ces groupes.

Dans cette famille, les poils sont nuls ou unicellulaires; les cristaux se présentent sous forme de mâcles, sauf dans l'*Hydrangea Hortensia*, qui contient des raphides. Le collenchyme est rare ou mal caractérisé. Les fibres épaisses sont nulles ou peu abondantes; le sclérenchyme fait défaut.

Le système libéro-ligneux est disposé en arc ou en anneau continu dans les arbrisseaux; dans le *Saxifraga cordifolia,* plante herbacée, les faisceaux sont distincts.

On sait que les organes floraux des Saxifragacées offrent certains caractères, qui permettent de les rapprocher des Rosacées. Il n'en est pas de même des pétioles : à part les mâcles qu'on trouve dans les deux familles, ils ne présentent que des différences. Dans les Rosacées, le collenchyme est fréquent, nettement différencié; on y trouve généralement du sclérenchyme. C'est le contraire dans les Saxifragacées. De plus, dans cette famille, le trajet des faisceaux n'offre pas la disposition typique qui caractérise les Rosacées.

LIQUIDAMBARÉES.

Liquidambar imberbe H. Kew. (Pl. III, fig. 8-12.)

$L = 38^{mm}$. — Le système libéro-ligneux débute par trois arcs de cercle (pl. III, fig. 8), qui en se recourbant forment trois anneaux; ceux-ci se soudent en un anneau unique (6^{mm}) (pl. III, fig. 9-10). Plus loin, on voit naître de chaque côté et en haut de cet anneau deux boucles qui s'en détachent et forment deux petits anneaux (11^{mm}) (fig. 11); puis l'anneau principal se fragmente lui-même en trois anneaux circulaires à peu près égaux (fig. 12).

En définitive le système libéro-ligneux se compose à la caractéristique de cinq anneaux circulaires disposés en fer à cheval, et dont les trois médians sont plus grands que les deux extrêmes.

Chacun des anneaux libéro-ligneux renferme un canal sécréteur. A l'initiale il n'existe que quatre de ces canaux : ils sont placés dans la concavité des faisceaux libéro-ligneux; le faisceau de gauche en renferme deux, tandis qu'il n'en existe qu'un dans les faisceaux droit et médian; le cinquième canal apparaît vers 8^{mm}; il résulte de la bifurcation du canal droit.

Les extrémités du pétiole sont dépourvues de sclérenchyme, mais on trouve, dans la portion moyenne de cet organe, des fibres scléreuses autour du liber. Le tissu conjonctif renferme des mâcles.

Par l'existence de canaux sécréteurs, par le trajet spécial de leurs faisceaux pétiolaires, les *Liquidambar* se distinguent des Saxifragacées et des Hamamélidées dont on les rapproche d'ordinaire. Ils se séparent aussi par les mêmes caractères des Platanées avec lesquelles certains auteurs leur trouvent des affinités.

CUCURBITACÉES.

1° CUCUMÉRINÉES.

Lagenaria vulgaris Ser. (Pl. V, fig. 27.)

$L = 100^{mm}$; $l = 2^{mm}7$; $e = 3^{mm}5$. — Poils de deux sortes : 1° unisériés; 2° glanduleux. Le collenchyme forme une couche hypodermique à peu près continue. Le tissu conjonctif se compose de cellules polygonales, à parois minces et à petits méats; il ne renferme pas de cristaux; il présente au centre une grande lacune. Il existe onze faisceaux bicollatéraux, dépourvus de sclérenchyme.

L'initiale ne diffère guère de la caractéristique que par sa forme qui est circulaire, un peu pointue à la partie supérieure; elle renferme également onze faisceaux.

Luffa acutangula Ser. (Pl. V, fig. 28.)

$L = 0^{mm}$; $l = 3^{mm}$; $e = 3^{mm}5$. — Poils unisériés. La caractéristique est anguleuse. On y trouve du collenchyme aux angles

et à la partie inférieure. Le parenchyme est dépourvu de cristaux. Le système libéro-ligneux se compose de onze faisceaux, dont neuf bicollatéraux.

Cucumis sativus L. (Pl. V, fig. 29.)

L = 110^{mm}; *l* = 3^{mm}5; *e* = 4^{mm}. — Poils unisériés et poils glanduleux. Le collenchyme forme une couche à peu près continue de deux ou trois assises. Le système libéro-ligneux se compose de neuf faisceaux dont sept bicollatéraux.

Il existe à l'initiale onze faisceaux, mais les deux supérieurs finissent par se souder à leurs voisins. On constate également à l'initiale que les plus gros faisceaux sont accompagnés à leur pôle externe de fibres scléreuses qui n'existent pas à la caractéristique.

Echallium Elaterium Rich. (Pl. I, fig. 9.)

L = 110^{mm}; *l* = 5^{mm}5; *e* = 4^{mm}5. — Poils plurisériés de 0^{mm}5 et poils unisériés de 0^{mm}6, formés par trois ou quatre cellules. Il existe sous l'épiderme deux ou trois assises de collenchyme. A la partie supérieure, on trouve au-dessous de cet hypoderme deux ou trois rangées de cellules chlorophylliennes. Le système libéro-ligneux se compose de sept gros faisceaux bicollatéraux et de huit petits faisceaux collatéraux, intercalaires.

A l'initiale, il n'existe que huit faisceaux. Le schéma (pl. I, fig. 9) indique le mode de formation des faisceaux intercalaires.

Cucurbita turbaniformis.

L = 135^{mm}; *l* = 4^{mm}5; *e* = 3^{mm}5. — Poils unisériés. Quelques-uns de ces poils sont placés sur une proéminence plurisériée. La caractéristique a la forme d'une ellipse aplatie à grand axe horizontal; elle présente une petite échancrure à la partie supérieure. Il existe une couche hypodermique de collenchyme interrompue par de petits amas de parenchyme chlorophyllien qui correspondent aux intervalles des faisceaux. Ceux-ci sont au nombre de onze; ils sont tous bicollatéraux. Le centre du pétiole est occupé par une grande lacune.

A l'initiale, on trouve treize faisceaux; les deux supérieurs se soudent à leurs voisins vers 120^{mm}.

Bryonia dioica L.

$L = 50^{mm}$; $l = 4^{mm}5$; $e = 2^{mm}$. — Poils glanduleux, pédicellés de 150 µ. La caractéristique est réniforme. Le collenchyme forme une couche continue. Le système libéro-ligneux est constitué par neuf faisceaux.

L'initiale a la forme d'une ellipse à grand axe horizontal; on y trouve le même nombre de faisceaux qu'à la caractéristique.

Melothria indica L.

$L = 75^{mm}$; $l = 2^{mm}05$; $e = 1^{mm}85$. — Poils unisériés et poils glanduleux. La caractéristique a la forme d'un cercle échancré à la partie supérieure. On voit, à la périphérie, des couches chlorophylliennes alterner avec des bandes de collenchyme : celles-ci sont placées en regard des faisceaux. Il existe sept faisceaux bicollatéraux et deux fascicules supérieurs. Le tissu conjonctif, formé de cellules polygonales, méatiques, à parois minces, présente une lacune centrale.

A l'initiale, on retrouve les sept faisceaux de la caractéristique; les fascicules ne sont pas encore formés.

2° ÉLATÉRIÉES

Cyclanthera explodens Ndn. (Pl. V, fig. 30.)

$L = 40^{mm}$; $l = 1^{mm}90$; $e = 2^{mm}$. — La caractéristique est un cercle présentant une échancrure à la partie supérieure. On trouve à la périphérie des bandes interrompues de collenchyme. Le système libéro-ligneux se compose de sept faisceaux bicollatéraux.

L'initiale est un cercle déprimé à la partie supérieure. Elle renferme sept faisceaux correspondant à ceux de la caractéristique.

Cyclanthera pedata Schrad.

$L = 95^{mm}$; $l = 3^{mm}05$; $e = 3^{mm}30$. — Poils nuls. La caractéristique est un cercle surmonté de deux lobes triangulaires. La

membrane externe est mince (3 μ). Comme dans l'espèce précédente, le collenchyme forme une couche interrompue. Le système libéro-ligneux se compose de sept faisceaux bicollatéraux, et de quatre fascicules supérieurs.

L'initiale est anguleuse, on y retrouve les sept faisceaux de la caractéristique. Les quatre fascicules naissent plus loin, de la ramification des deux faisceaux supérieurs.

3° SICYOIDÉES.

Sycios angulata L.

Cette espèce présente les mêmes caractères généraux que les Cucurbitacées appartenant aux autres tribus.

Caractères communs. — D'après MM. Bentham et Hooker, la famille des Cucurbitacées se divise en huit tribus. Les plantes que j'ai étudiées se rapportent aux trois plus importantes de ces tribus.

Du reste, toutes les plantes de cette famille présentent une structure uniforme. Comme elles sont toutes herbacées, nous y trouvons des faisceaux distincts. Ces faisceaux sont bicollatéraux, de plus ils sont à peu près égaux, ce qui différencie les Cucurbitacées des familles à faisceaux bicollatéraux, mais où le faisceau médian inférieur est prépondérant, comme les Myrtacées, les Œnothérées, les Asclépiadées, les Apocynées, les Solanées, les Convolvulacées, les Polémoniées. Les Cucurbitacées se distinguent en outre des Myrtacées, des Œnothérées, des Asclépiadées et d'un certain nombre d'Apocynées par l'absence de mâcles, des Solanées par le manque de granulations cristallines. Les laticifères y font défaut, ce qui les sépare encore des Asclépiadées, Apocynées, Convolvulacées.

Parmi les autres caractères communs aux Cucurbitacées, je citerai la présence constante de collenchyme bien caractérisé, formant une couche hypodermique tantôt continue, tantôt discontinue; l'absence de sclérenchyme; le parallélisme des faisceaux qui ne présentent généralement pas d'anastomoses. On y trouve assez fréquemment des poils unisériés et des poils glanduleux.

BÉGONIACÉES.

Begonia discolor R. Br. (Pl. V, fig. 31.)

L = 80^{mm}; $l = 3^{mm}30$; $e = 3^{mm}55$. — Poils nuls. La caractéristique est sensiblement circulaire. L'hypoderme est formé par deux ou trois assises de collenchyme. Le tissu cortical est constitué par des cellules polygonales à parois minces, laissant entre elles de petits méats. Il renferme des mâcles d'oxalate de chaux et des grains d'amidon. Le système libéro-ligneux se compose d'une quinzaine de faisceaux collatéraux disposés en cercle, mais sans symétrie. On trouve en outre deux faisceaux à l'intérieur de ce cercle.

L'initiale présente à peu près le même nombre de faisceaux que la caractéristique.

Les Bégoniacées ne comprennent que deux genres : *Begonia* et *Hillebrandia*. Ce dernier ne renferme qu'une espèce, qui est herbacée comme la grande majorité des *Begonia*. Par conséquent les caractères de la famille ne doivent guère différer de ceux du *Begonia discolor*. Celui-ci se rapproche des Cucurbitacées par ses faisceaux périphériques distincts et disposés en cercle, par l'absence de sclérenchyme, la présence de collenchyme. Mais il en diffère parce que ses faisceaux ne sont pas bicollatéraux et parce qu'il contient des mâcles d'oxalate de chaux.

OMBELLIFÈRES.

1° ÉCHINOPHORÉES.

Echinophora trichophyllus. (Pl. V, fig. 33.)

$l = 1^{mm}8$; $e = 1^{mm}65$. — La caractéristique est ogivale sinueuse. Chaque sinuosité correspond à un faisceau libéro-ligneux et renferme du collenchyme. Le parenchyme cortical est formé de cellules à parois minces, dépourvues de cristaux. On y trouve des canaux sécréteurs placés en regard des faisceaux libéro-ligneux. Ceux-ci sont de deux sortes : les uns périphériques, les

autres moins nombreux sont intra-médullaires, tous sont disposés symétriquement et entourés de fibres scléreuses qui forment aussi un péricycle général autour des faisceaux périphériques. Les cellules médullaires sont sclérifiées. La sclérose de ces divers éléments nous explique la rigidité de ce pétiole.

2° AMMINÉES.

Conium maculatum L. (Pl. V, fig. 40.)

L = 200^{mm}; l = 3^{mm}7; e = 4^{mm}. — Poils nuls. La caractéristique a la forme d'une ellipse à grand axe vertical. Son contour présente treize sinuosités, renfermant du collenchyme et correspondant chacune, sauf les deux supérieures, à un seul faisceau libéro-ligneux. Le tissu conjonctif se compose de cellules légèrement polygonales, un peu méatiques, dépourvues de cristaux; il présente au centre une grande lacune. Il renferme des canaux sécréteurs : les uns placés sans ordre, les autres disposés régulièrement derrière chaque faisceau libéro-ligneux. Ceux-ci sont au nombre de dix-sept rangés symétriquement. Ils n'ont pas de sclérenchyme.

Apium graveolens L. (Pl. V, fig. 41.)

La caractéristique du pétiole que je décris a 13^{mm}5 de largeur et 11^{mm} d'épaisseur; il y en a de plus grandes. Elle a la forme d'un croissant dont le bord convexe est sinueux. Comme dans les espèces précédentes, les sinuosités correspondent aux faisceaux libéro-ligneux. Ceux-ci sont au nombre de treize; dans de plus gros pétioles on en trouve quinze. Le parenchyme cortical dépourvu de cristaux renferme des canaux sécréteurs.

Helosciadium nodiflorum K. (Pl. V, fig. 42.)

L = 11^{mm} + 34^{mm}; l = 1^{mm}75; e = 1^{mm}60. — Poils nuls. La caractéristique est une ellipse à grand axe horizontal, à contour sinueux; elle présente une échancrure à la partie supérieure. Le tissu conjonctif, dépourvu de cristaux, est formé de cellules rondes laissant entre elles des méats et des canaux

aérifères (cette plante vit dans les fossés). Le système libéro-ligneux se compose de neuf faisceaux auxquels correspondent autant de faisceaux collenchymateux et de canaux sécréteurs accolés au liber.

Le collenchyme forme encore six faisceaux intercalaires dans la partie inférieure du pétiole; à chacun de ces îlots de collenchyme, qui ne correspondent pas aux faisceaux libéro-ligneux, se trouve accolé un canal sécréteur. Il n'y a pas de sclérenchyme.

Berula angustifolia K. (Pl. V, fig. 43.)

L = 145^{mm}; l = 5^{mm}; e = 3^{mm}. — La caractéristique est une ellipse aplatie à sa partie supérieure. Comme l'*Helosciadium nodiflorum*, le *Berula angustifolia* vit dans les fossés, et son pétiole va nous présenter la même structure que le précédent. La membrane externe est mince (3 μ). Le tissu conjonctif, dont les premières assises sont chlrorophylliennes, est formé de cellules rondes méatiques. Il est traversé par des canaux aérifères et une grande lacune occupe son centre. Le système libéro-ligneux se compose de onze faisceaux. Le collenchyme et les canaux sécréteurs sont disposés comme dans l'*Helosciadium nodiflorum*.

Ægopodium podagraria L. (Pl. V, fig. 44.)

L = 270^{mm}; l = 2^{mm}80; e = 1^{mm}9. — Poils nuls. La caractéristique est triangulaire, avec deux lobes latéro-supérieurs. Le tissu conjonctif se compose de cellules polygonales. Le collenchyme forme aux trois angles du pétiole trois masses, reliées entre elles par une assise du même tissu. Les faisceaux libéro-ligneux sont au nombre de onze. A chacun de ces faisceaux correspond un canal sécréteur. Il existe encore de nombreux canaux sécréteurs rangés en grande partie à la périphérie du tissu conjonctif.

L'initiale présente le même nombre de faisceaux, mais ils sont plus espacés.

Pimpinella Sp.

$L = 2^{mm} + 14^{mm}$; $l = 2^{mm}07$; $e = 2^{mm}20$. — Poils nuls. La caractéristique a une forme générale triangulaire comme la précédente; mais les côtés latéraux sont sinueux; le côté supérieur est concave. On trouve du collenchyme aux trois sommets du triangle; il en existe aussi trois îlots sur chaque côté latéral. Le système libéro-ligneux se compose de neuf faisceaux. Il n'y a pas de sclérenchyme.

On trouve sept faisceaux seulement à la pseudo-initiale.

Anthriscus Cerefolium Hoff. (Pl. V, fig. 5.)

$L = 180^{mm}$; $l = 2^{mm}5$; $e = 2^{mm}$. — La caractéristique a une forme pentagonale. Les angles sont occupés par des faisceaux collenchymateux. Le tissu conjonctif présente une lacune centrale; il est formé de cellules polygonales, dépourvues de cristaux. Le système libéro-ligneux comprend sept faisceaux, auxquels correspondent autant de canaux sécréteurs.

3° SESELINÉES.

Fœniculum officinale All. (Pl. V, fig. 39.)

$L = 250^{mm}$; $l = 3^{mm}5$; $e = 5^{mm}$. — La caractéristique a la forme d'une ellipse à grand axe vertical. L'épiderme est renforcé par une assise hypodermique. Au-dessous on rencontre deux ou trois assises chlorophylliennes interrompues par les faisceaux de collenchyme. Ceux-ci sont au nombre de quatorze, correspondant à autant de faisceaux libéro-ligneux disposés en ellipse. Nous trouvons ici un faisceau médian supérieur. Parmi les canaux sécréteurs, les uns plus petits sont disposés assez irrégulièrement dans le tissu conjonctif; les autres plus gros correspondent aux faisceaux libéro-ligneux et sont accolés aux massifs du collenchyme.

Œnanthe fistulosa L.

$L = 7^{mm}68$; $l = 2^{mm}$; $e = 1^{mm}$. — Poils nuls. La caractéristique est une ellipse à grand axe horizontal. Il existe onze

faisceaux de collenchyme, correspondant à autant de faisceaux libéro-ligneux. Entre chaque faisceau de collenchyme s'étend une couche de cellules chlorophylliennes. Le reste du tissu conjonctif est incolore; sa partie centrale est lacuneuse. L'*Œ. fistulosa*, comme on sait, est une plante de marais. Les canaux sécréteurs sont placés à la périphérie du tissu conjonctif : les uns sont disposés régulièrement en face de chaque faisceau, les autres dans les intervalles des premiers. Comme dans les espèces précédentes, les cristaux et le sclérenchyme font défaut.

L'initiale a la forme d'un croissant très mince : on y trouve déjà les onze faisceaux libéro-ligneux de la caractéristique; ils se rapprochent peu à peu, à mesure que le pétiole se rétrécit.

Angelica Sp. (Pl. V, fig. 38.)

$L = 140^{mm}$. — La caractéristique est un cercle un peu aplati de bas en haut. Le système libéro-ligneux se compose de gros faisceaux disposés en cercle; entre ces faisceaux, mais un peu en dehors d'eux, on en trouve de plus petits. Aux gros faisceaux libéro-ligneux correspondent des faisceaux collenchymateux. Une grande lacune *l* occupe le centre du pétiole.

4° PEUCÉDANÉES.

Peucedanum officinale L. (Pl. V, fig. 34.)

$L = 360^{mm}$; $l = 2^{mm}75$; $e = 3^{mm}20$. — (Pétiole d'une feuille radicale.) Poils nuls. Le système libéro-ligneux comprend neuf faisceaux principaux, périphériques, et cinq faisceaux centraux. Il existe encore deux petits faisceaux intercalaires *d* et *g*, qui peuvent se souder aux faisceaux voisins. La figure 34 (pl. V) montre que le faisceau *d* est libre; le faisceau *g* est soudé. On voit à la périphérie onze faisceaux de collenchyme correspondant aux onze faisceaux libéro-ligneux périphériques. Il existe assez régulièrement un canal sécréteur aux deux pôles libérien et ligneux des faisceaux périphériques. On aperçoit dans le centre du pétiole d'autres canaux sécréteurs disposés irrégulièrement.

Le liber contient également des canaux sécréteurs; il est recouvert dans chaque faisceau d'un arc de fibres épaisses.

L'initiale a la forme d'un croissant; les faisceaux périphériques y existent seuls; ce sont eux qui émettent plus loin les faisceaux centraux.

La caractéristique d'une feuille caulinaire m'a montré la même disposition générale; il n'y a que quatre faisceaux centraux disposés à peu près dans le plan de symétrie du pétiole.

Pastinaca sativa L. (Pl. V, fig. 36.)

$L = 6^{mm} + 13^{mm}$; $l = 4^{mm}7$; $e = 6^{mm}$.— Poils nuls. Il existe quinze faisceaux libéro-ligneux périphériques disposés symétriquement, et douze faisceaux centraux rangés également avec symétrie, quoique moins régulièrement que les premiers. Les faisceaux centraux ont leur bois généralement dirigé vers la partie supérieure du pétiole. A chaque faisceau libéro-ligneux périphérique, correspondent un canal sécréteur et un faisceau collenchymateux. On trouve également quelques canaux sécréteurs disséminés dans le tissu conjonctif; celui-ci est formé de grandes cellules arrondies, méatiques, dépourvues de cristaux.

A l'initiale, qui est une bande étroite, les faisceaux libéro-ligneux sont disposés sur une seule ligne.

Pastinaca opaca Horn. (Pl. V, fig. 37.)

$L = 11^{mm} + 21$; $l = 7^{mm}$; $e = 9^{mm}5$. — Poils coniques. La caractéristique de cette espèce nous offre les mêmes caractères que la précédente. Mais le pétiole étant plus épais, les faisceaux sont plus nombreux : on en compte dix-sept périphériques et une vingtaine de centraux. Comme dans le *Pastinaca sativa,* ces derniers ont leur bois dirigé vers le haut; leur disposition est moins symétrique que celle des premiers.

Heracleum Lypoleucum Vis. (Pl. V, fig. 35.)

$L = 120^{mm}$; $l = 3^{mm}$; $e = 2^{mm}5$. — Poils unicellulaires de $2^{mm}5$. Le système libéro-ligneux se compose de neuf faisceaux

centraux, et de quinze faisceaux périphériques; à ces derniers correspondent autant de faisceaux collenchymateux et de canaux sécréteurs. Il existe encore d'autres canaux sécréteurs épars dans le tissu conjonctif.

5° CAUCALINÉES.

Daucus Carota L.

Le pétiole du *D. Carota* offre beaucoup d'analogie avec celui de l'*Heracleum hypoleucum*. Dans les gros pétioles, les faisceaux libéro-ligneux sont rangés suivant trois demi-cercles concentriques; on en compte une quinzaine dans le demi-cercle externe.

6° LASERPITIÉES.

Thapsia garganica L. (Pl. V, fig. 32.)

L = 22$^{\text{cent.}}$ — La caractéristique est à peu près circulaire, un peu aplatie en haut; elle a 8$^{\text{mm}}$ de diamètre environ. Les faisceaux libéro-ligneux sont fort nombreux, à peu près une cinquantaine. On trouve comme précédemment en arrière de chaque faisceau périphérique un canal sécréteur et un faisceau collenchymateux.

7° SANICULÉES.

Eryngium maritimum L. (Pl. V, fig. 48.)

L = 35$^{\text{mm}}$ + 90$^{\text{mm}}$; l = 8$^{\text{mm}}$5; e = 6$^{\text{mm}}$5. — Poils nuls. La caractéristique a la forme d'un demi-cercle. Le tissu conjonctif se compose de cellules polyédriques, à parois minces et à petits méats. Le système libéro-ligneux comprend treize faisceaux, disposés en fer à cheval à une certaine distance de la périphérie. A chacun de ces faisceaux libéro-ligneux correspondent une bande de collenchyme et deux canaux sécréteurs placés en arrière, l'un près du liber, l'autre près du faisceau collenchymateux. Il existe en outre d'autres canaux sécréteurs.

A l'initiale, on trouve quinze faisceaux au lieu de treize, les deux supérieurs finissant par se souder avec leurs voisins.

Eryngium campestre L. (Pl. V, fig. 46-47.)

L = 270mm; *l* = 6mm; *e* = 7mm. — Poils nuls. Le collenchyme forme ici une couche continue, de huit à dix cellules d'épaisseur. Les faisceaux libéro-ligneux sont encore plus rapprochés du centre que ceux de l'*E. maritimum*. On en compte vingt et un disposés suivant les branches d'un U, et treize placés en dedans des premiers. Le tissu conjonctif est composé de cellules rondes, à parois minces, et renferme des mâcles, fait exceptionnel chez les Ombellifères. Il contient aussi des canaux sécréteurs; on en trouve régulièrement un derrière chaque faisceau libéro-ligneux périphérique, mais en dedans de ces faisceaux ils sont disposés sans ordre.

L'initiale a la forme d'une bande étroite, où les faisceaux sont disposés sur une seule ligne; ils correspondent aux faisceaux périphériques de la caractéristique. Quant aux faisceaux centraux, ils naissent d'un nombre égal, ou à peu près égal de faisceaux périphériques inférieurs, moitié à droite, moitié à gauche.

8° HYDROCOTYLÉES.

Hydrocotyle vulgaris L. (Pl. V, fig. 49.)

L = 60mm; *l* = 1mm; *e* = 1mm. — Poils de 1mm3, plurisériés. peu nombreux. La caractéristique est un cercle. Le parenchyme cortical est formé de cellules grandes, rondes, à parois minces, laissant entre elles de grands méats; il est séparé de l'épiderme par une assise hypodermique. Le système libéro-ligneux forme un cercle, complet dans la partie libérienne, interrompu dans la partie ligneuse. On trouve à sa périphérie sept canaux sécréteurs.

Le système libéro-ligneux débute par trois faisceaux qui se soudent à l'extrémité terminale du pétiole.

Caractères communs. — Les Ombellifères peuvent se diviser, d'après MM. Bentham et Hooker, en neuf tribus, que nous avons examinées, à l'exception des Mulinées.

Dans cette famille, le pétiole est d'ordinaire glabre; dans quelques espèces il est muni de poils unicellulaires. Les cristaux

font défaut, je n'en ai trouvé que dans l'*Eryngium campestre*. Le collenchyme se présente d'ordinaire sous forme de faisceaux bien distincts, disposés à la périphérie en regard des faisceaux libéro-ligneux. Ceux-ci sont généralement munis de fibres épaisses à leur pôle externe, quelquefois aussi à leur pôle interne. Le sclérenchyme manque; cependant chez l'*Echinophora trichophyllus*, les fibres épaisses sont remplacées par des fibres scléreuses qui forment un péricycle continu. Les faisceaux libéro-ligneux sont distincts, parallèles dans toute la longueur du pétiole, ils ne présentent pas d'anastomoses, les ramifications sont rares, excepté lorsqu'il existe des faisceaux centraux qui naissent généralement des faisceaux périphériques (ex. *Eryngium campestre*). Ces faisceaux périphériques sont rangés en arc de cercle ouvert en haut; dans quelqus cas ils dessinent, tout en restant séparés, un cercle complet, par exemple dans le *Fœniculum officinale*, le *Thapsia garganica*, l'*Angelica*, c'est-à-dire dans des plantes vivaces et de taille élevée. Le tissu conjonctif est à parois minces, méatique, souvent lacuneux. On y trouve des canaux sécréteurs oléifères : il en existe toujours un en regard du pôle externe de chaque faisceau libéro-ligneux périphérique, tantôt accolé à ce faisceau, tantôt réuni au faisceau de collenchyme correspondant, tantôt situé entre ces deux faisceaux; outre ces canaux disposés régulièrement, il en existe d'autres en nombre variable et distribués sans ordre.

Les *Eryngium* forment une transition entre les Ombellifères et les Araliacées. Les faisceaux libéro-ligneux y sont plus rapprochés les uns des autres que dans la plupart des Ombellifères, le collenchyme hypodermique ne présente que de petites interruptions *(E. maritimum)*. Enfin, ce dernier renferme des mâcles comme les Araliacées.

ARALIACÉES.

Panax filicifolia. (Pl. V, fig. 51.)

$L = 20^{mm}$; $l = 0^{mm}93$; $e = 1^{mm}05$. — Poils nuls. Le parenchyme cortical est à parois minces. Le système libéro-ligneux se

compose de cinq faisceaux disposés en cercle; à sa périphérie, on trouve sept canaux sécréteurs.

Le système libéro-ligneux débute par sept faisceaux; les deux supérieurs se soudant avec leurs voisins, il n'y a plus que cinq faisceaux distincts à la caractéristique.

Aralia spinosa L. (Pl. V, fig. 52.)

$L = 230^{mm}$; $l = 5^{mm}5$; $e = 5^{mm}5$. — Le pétiole est dépourvu de poils, mais muni d'aiguillons. La caractéristique est à peu près circulaire, un peu aplatie à la partie supérieure. Il existe un hypoderme collenchymateux, formé de six assises. Le parenchyme cortical est réduit à deux ou trois assises, il renferme des mâcles d'oxalate de chaux et des canaux sécréteurs. Les faisceaux libéro-ligneux sont disposés sur deux cycles; dans le cycle externe, les faisceaux, au nombre d'une quarantaine environ, sont alternativement grands et petits, et ont leur bois situé en dedans; le cycle interne comprend une vingtaine de faisceaux à peu près d'égale grandeur dont le bois est tourné en dehors et qui sont placés vis-à-vis des petits faisceaux du cycle externe ([1]). La moelle, formée de cellules polyédriques sclérifiées, contient des mâcles et de larges canaux sécréteurs.

L'initiale diffère surtout de la caractéristique par sa forme; c'est un triangle à sommets arrondis.

Fatsia papyrifera.

$L = 250^{mm}$; $l = 3^{mm}5$; $e = 5^{mm}5$. — La caractéristique est à peu près circulaire. L'hypoderme comprend sept assises de collenchyme. Le tissu conjonctif, formé de cellules non sclérifiées, renferme des mâcles et des canaux sécréteurs. Les faisceaux libéro-ligneux sont disposés sur deux cycles, mais avec moins de régularité que dans l'espèce précédente : les faisceaux du cycle interne ont leur bois tourné en dedans; on se rappelle que c'est l'inverse dans l'*A. spinosa*. Il n'y a pas de sclérenchyme.

([1]) Cette disposition a été signalée par M. Trécul, *Des Vaisseaux propres chez les Araliacées* (*Ann. Sc. nat.*, 1867).

On constate une disposition analogue dans le système libéro-ligneux de l'initiale. Celle-ci diffère de la caractéristique par sa forme; elle est plus aplatie à sa partie supérieure. On y trouve une grande lacune qui se prolonge dans la majeure partie du pétiole.

Fatsia japonica.

$L = 220^{mm}$; $l = 6^{mm}5$; $e = 6^{mm}5$. — Poils nuls. La caractéristique est un cercle légèrement déprimé à sa partie supérieure. Il existe à la périphérie six ou huit assises de collenchyme; elles renferment des canaux sécréteurs. Le parenchyme cortical es formé de cellules rondes, méatiques; on y trouve des mâcles et des canaux sécréteurs. Le système libéro-ligneux se compose de faisceaux accolés les uns aux autres, soudés en quelques endroits par leur liber; ils font alternativement saillie en dedans et en dehors du cercle sur lequel ils sont disposés; de sorte que ce cercle paraît festonné. Ces faisceaux sont entourés d'une couche continue de fibres scléreuses. La moelle formée de cellules rondes, méatiques, renferme des mâcles et des canaux sécréteurs.

A l'initiale, les faisceaux sont écartés les uns des autres et disposés sans ordre.

Hedera helix L. (Pl. V, fig. 50.)

L : très variable; $l = 1^{mm}45$; $e = 1^{mm}50$. — Il existe sous l'épiderme une couche continue de collenchyme; elle est plus épaisse dans les deux lobes supérieurs. Le tissu conjonctif est formé de cellules rondes, méatiques; on y trouve des mâcles et des canaux sécréteurs, rapprochés du liber des faisceaux libéro-ligneux. Ceux-ci sont au nombre de cinq (les deux supérieurs sont plus gros que les autres); ils sont disposés en cercle, et manquent de sclérenchyme.

A l'initiale, on trouve généralement sept faisceaux; mais les deux supérieurs se soudent plus loin avec leurs voisins, ce qui nous explique la grosseur relative des faisceaux supérieurs de la caractéristique.

Dans une espèce d'*Hedera* dont le tronc était très développé,

le système libéro-ligneux du pétiole m'a présenté une disposition fort curieuse.

A l'initiale, les faisceaux sont disposés en anneau fermé. Plus loin, cet anneau se fragmente; sa partie inférieure se divise en trois faisceaux, tandis que la partie supérieure se recourbe et forme un anneau qui surmonte les trois faisceaux isolés (pl. V, fig. 54). C'est le seul exemple que je connaisse d'une pareille disposition : dans tous les cas où il existe à la fois un anneau et des faisceaux isolés, l'anneau est placé à la partie inférieure du pétiole.

CARACTÈRES COMMUNS. — Les Araliacées renferment des canaux sécréteurs, comme les Ombellifères. Elles s'en distinguent par la présence de mâcles, parce que le collenchyme hypodermique y forme une couche continue, et que les faisceaux libéro-ligneux y sont d'ordinaire disposés en cercle. Ces faisceaux sont tantôt espacés, tantôt accolés et en partie soudés par leur liber *(Fatsia japonica)*.

CORNÉES.

Cornus sanguinea L.

$L = 9^{mm}$; $l = 1^{mm}4$; $e = 1^{mm}4$. — Poils unicellulaires de 300 µ. Le parenchyme cortical est formé de cellules rondes, peu méatiques. Le système libéro-ligneux se compose d'un arc de cercle et d'un faisceau placé suivant la corde de cet arc. On trouve dans le liber de nombreuses mâcles d'oxalate de chaux. Elles sont plus rares dans le tissu conjonctif. Il n'y a pas de sclérenchyme.

Le système libéro-ligneux débute par trois faisceaux, qui en produisent deux autres, comme nous l'avons vu dans le *Cytisus Laburnum* (pl. I, fig. 2). Ce sont ces deux faisceaux qui forment à la caractéristique la corde de l'arc : tantôt ils se soudent ensemble, tantôt ils restent distincts.

Cornus sericea l'Hérit. (Pl. V, fig. 55.)

$L = 13^{mm}$; $l = 1^{mm}70$; $e = 1^{mm}65$. — La caractéristique est un cercle incomplet à la partie supérieure. Il existe une mince couche hypodermique. Le parenchyme cortical se compose de

cellules rondes, méatiques; il renferme des mâcles d'oxalate de chaux. Le système libéro-ligneux présente la même disposition que dans l'espèce précédente. On y voit de plus deux petits faisceaux latéro-supérieurs, qui naissent des bords de l'arc de cercle. Le liber contient quelques mâcles. Il n'y a pas de sclérenchyme.

Alangium hexapetalum.

$l = 1^{mm}30$; $e = 0^{mm}80$. — Poils unicellulaires de 150 μ. Il existe un hypoderme collenchymateux, des mâcles dans le tissu conjonctif. Le système libéro-ligneux a la même disposition que dans les *Cornus*, mais les extrémités de l'arc de cercle débordent les faisceaux médians-supérieurs.

Aucuba japonica L. (Pl. V, fig. 57.)

$L = 15^{mm}$; $l = 3^{mm}5$; $e = 2^{mm}5$. — La membrane externe est épaisse (10 μ). Le tissu conjonctif est formé de cellules rondes, à parois épaisses; il renferme des granulations cristallines, ce qui est une exception chez les Cornées. Le système libéro-ligneux est disposé en demi-cercle.

Comme dans les *Cornus*, on trouve à l'initiale trois faisceaux, mais qui se soudent sans émettre de fascicules.

Griselinia littoralis. (Pl. V, fig. 58.)

$L = 15^{mm}$; $l = 2^{mm}3$; $e = 1^{mm}80$. — La membrane externe est épaisse (15 μ). L'hypoderme comprend trois assises collenchymateuses. Le parenchyme cortical, formé de cellules rondes, méatiques, à parois épaisses, contient des mâcles d'oxalate de chaux. Le système libéro-ligneux se compose d'un grand faisceau en arc de cercle et de deux petits faisceaux latéro-supérieurs *d* et *g*. On trouve parfois quelques fibres scléreuses dans la concavité de l'arc.

Le système libéro-ligneux débute par cinq faisceaux; vers 5^{mm}, ils se soudent en un arc, dont les extrémités émettent les deux petits faisceaux *d* et *g*.

Benthamia fragifera. (Pl. V, fig. 56.)

$L = 6^{mm}$; $l = 1^{mm}5$; $e = 1^{mm}2$. — Poils en navette. Il existe une couche hypodermique. Les cellules du parenchyme

sont polygonales, à parois épaisses; elles renferment des mâcles. Le système libéro-ligneux a la même disposition que dans le *Cornus sericea*. La moelle, très réduite, contient des mâcles.

Nyssa aquatica. (Pl. V, fig. 60.)

$L = 15^{mm}$; $l = 2^{mm}30$; $e = 1^{mm}15$. — Poils nuls. Comme dans les autres espèces de Cornées, on retrouve ici un hypoderme. Le parenchyme cortical est à parois minces, il présente des canaux aérifères à la partie supérieure du pétiole. Le système libéro-ligneux est semblable à celui du *Cornus sericea*, mais ici nous trouvons du sclérenchyme.

Helwingia rusciflora.

$L = 5^{mm}$; $l = 1^{mm}48$; $e = 1^{mm}30$. — Poils nuls. Le parenchyme cortical est formé de cellules rondes ou polygonales et renferme quelques mâcles d'oxalate de chaux. Le système libéro-ligneux ne comprend qu'un faisceau courbé en arc.

Ce genre réuni aux Araliacées par MM. Bentham et Hooker, en est actuellement séparé. L'examen du pétiole justifie cette séparation; car il ne renferme pas de canaux sécréteurs, alors que toutes les Araliacées en contiennent.

Caractères communs. — D'après MM. Bentham et Hooker, la famille des Cornées comprend douze genres. Ce nombre ne sera pas changé, si nous y ajoutons le genre *Helwingia*, et si nous en retranchons le genre *Garrya* qui offre des caractères assez différents.

Dans cette famille, les poils sont nuls ou unicellulaires. Dans le *Benthamia fragifera*, on trouve des poils en navette. On rencontre toujours des mâcles d'oxalate de chaux, sauf dans l'*Aucuba japonica*, qui renferme des cristaux pulvérulents. Il existe d'ordinaire une couche hypodermique collenchymateuse. Les faisceaux ne possèdent pas de fibres épaisses, ni de sclérenchyme, sauf chez le *Nyssa aquatica*, dont le liber est doublé de fibres scléreuses. Le système libéro-ligneux dessine à la caractéristique, tantôt un simple arc de cercle, tantôt un arc et sa corde. A l'initiale, on

trouve toujours trois faisceaux distincts qui se rapprochent et se fusionnent pour former un arc de cercle *(Griselinia littoralis, Aucuba japonica, Helwingia rusciflora)*, dans d'autres cas, avant de se souder en arc de cercle, les trois faisceaux initiaux émettent des ramifications qui en s'unissant forment la corde de l'arc (voy. pl. I, fig. 2).

Nous verrons plus loin que le pétiole des Caprifoliacées et en particulier celui des *Viburnum*, présente dans sa structure beaucoup de ressemblance avec celui des Cornées.

GAMOPÉTALES.

SOLANÉES.

1° ATROPÉES.

Lycopersicum esculentum Mill. (Pl. V, fig. 61.)

$L = 32^{mm}$; $l = 3^{mm}$; $e = 3^{mm}5$. — Poils de deux sortes : 1° unisériés de 250 μ; 2° glanduleux de 185 μ. Il existe une zone collenchymateuse séparée de l'épiderme par une ou deux assises de cellules chlorophylliennes. Le parenchyme cortical est formé de grandes cellules rondes, méatiques; certaines d'entre elles sont remplies de petites granulations cristallines qui les font paraître noirâtres. De semblables granulations existent dans toutes les Solanées. Le système libéro-ligneux se compose d'un grand faisceau en fer à cheval, surmonté à ses extrémités de deux fascicules. Dans le grand faisceau, il existe du liber sur les deux côtés du bois, nous retrouverons également des faisceaux bicollatéraux dans toutes les Solanées. Il n'y a pas de sclérenchyme.

A l'initiale, le système libéro-ligneux est également disposé en fer à cheval; mais il est divisé en trois fragments dont le médian est plus petit que les latéraux; les faisceaux supérieurs n'existent pas.

Solanum melongena L. (Pl. V, fig. 62.)

$L = 60^{mm}$; $l = 5^{mm}2$; $e = 5^{mm}$. — L'épiderme est muni de poils. Il existe un hypoderme d'épaisseur variable, plus épais dans le haut et dans le bas du pétiole que sur les côtés. Le parenchyme cortical se compose de grandes cellules à parois minces. Les granulations cristallines sont généralement contenues dans des cellules plus petites. Le système libéro-ligneux se compose d'un faisceau principal courbé en arc de cercle et de six faisceaux latéraux disposés symétriquement au-dessus de lui. Le faisceau principal est bicollatéral.

L'initiale ne présente guère de différences avec la caractéristique.

Solanum Dulcamara L.

$L = 18^{mm}$; $l = 1^{mm}8$; $e = 1^{mm}8$. — On trouve quelques petits poils à la partie supérieure du pétiole. Le parenchyme cortical, formé de cellules polyédriques, est enveloppé par une couche de collenchyme. Le système libéro-ligneux se compose de deux petits faisceaux latéro-supérieurs, et d'un large faisceau médian. Celui-ci est bicollatéral, et son liber renferme des cristaux pulvérulents. Il n'y a pas de sclérenchyme.

Le système libéro-ligneux débute par cinq faisceaux réunis au centre du pétiole; il y en a trois gros au milieu, et un petit de chaque côté, mais tandis que les trois gros se rapprochent les uns des autres, et se soudent pour former le large faisceau médian de la caractéristique, les deux petits s'écartent et gagnent la partie supérieure du pétiole.

Solanum tuberosum L.

$L = 35^{mm}$; $l = 4^{mm}5$; $e = 4^{mm}$. — Poils unisériés de 1^{mm}, composés de trois à cinq cellules; ils sont plus nombreux à la face supérieure qu'à la partie inférieure du pétiole. Le collenchyme forme une couche de deux ou quatre assises; il est séparé de l'épiderme par une assise de cellules chlorophylliennes. Le système libéro-ligneux se compose d'un faisceau principal, dessinant un demi-cercle très régulier, et de deux petits faisceaux placés au-dessus de ses extrémités. Il existe dans le bois du faisceau principal deux interruptions qui isolent à la partie inférieure un petit faisceau ligneux. Le liber est continu.

A l'initiale, nous constatons la même disposition; seulement les deux interruptions que nous avons signalées dans le bois de la caractéristique, sont beaucoup plus larges. Le liber est donc disposé suivant un arc de cercle continu, tandis que le bois forme trois faisceaux placés au milieu et aux extrémités de cet arc.

Solanum texanum Dum.

$L = 90^{mm}$; $l = 4^{mm}5$; $e = 4^{mm}5$. — Cette espèce présente les mêmes caractères que les précédentes. On y trouve du collenchyme, des granulations cristallines dans le parenchyme cortical et dans le liber. Le système libéro-ligneux se compose d'un faisceau principal bicollatéral et de deux faisceaux latéraux. Ce pétiole présente cependant une particularité : il possède des poils étoilés.

Physalis peruviana L.

$L = 30^{mm}$; $l = 2^{mm}04$; $e = 2^{mm}04$. — Poils de deux sortes : 1° unisériés de $0^{mm}5$; 2° glanduleux, pédicellés de 300 μ. L'hypoderme est formé de deux ou trois assises de collenchyme. Le parenchyme cortical se compose de cellules légèrement polyédriques. Il renferme des granulations cristallines. Celles-ci font défaut dans le liber. Le système libéro-ligneux se compose d'un grand faisceau en arc et de deux petits faisceaux. Il n'y a pas de sclérenchyme.

L'initiale nous montre trois faisceaux qui se soudent rapidement en un faisceau principal, dont les extrémités émettent deux petits faisceaux.

Capsicum annum L. (Pl. V, fig. 63.)

$L = 18^{mm}$; $l = 1^{mm}4$; $e = 1^{mm}2$. — Poils nuls. La caractéristique a la même forme que celle du *Physalis peruviana*. Ce pétiole étant relativement grêle, le collenchyme y est très réduit; on n'en trouve guère que dans les lobes supérieurs. Le système libéro-ligneux se compose d'un large faisceau médian, et de deux latéraux.

A l'initiale, le faisceau médian existe seul.

Atropa belladona L. (Pl. V, fig. 64.)

$L = 10^{mm}$; $l = 2^{mm}75$; $e = 2^{mm}40$. — On trouve aux côtés supérieur et inférieur du pétiole de grandes cellules collenchy-

mateuses. Le parenchyme cortical est formé de grandes cellules arrondies, méatiques. On y trouve des granulations cristallines. Le système libéro-ligneux se compose d'un grand faisceau bicollatéral médian, et de fascicules au nombre de trois ou quatre de chaque côté. Il n'y a pas de sclérenchyme.

A l'initiale on trouve également un faisceau médian et seulement deux faisceaux latéraux qui donnent naissance aux fascicules de la caractéristique.

2° HYOSCYAMÉES.

Datura stramonium L. (Pl. V, fig. 65.)

$L = 90^{mm}$; $l = 4^{mm}$; $e = 5^{mm}2$. — Poils de deux sortes : 1° unisériés de $0^{mm}7$, situés seulement sur la face supérieure du pétiole; 2° glanduleux. La forme générale de la caractéristique est une ellipse échancrée à la partie supérieure. Il existe sous l'épiderme une couche continue de collenchyme. Le tissu conjonctif est constitué par de grandes cellules polygonales, méatiques, à parois minces. Le système libéro-ligneux se compose d'un faisceau bicollatéral recourbé en U, dont chaque branche est surmontée d'un faisceau également bicollatéral.

A l'initiale le système libéro-ligneux forme un cercle, fendu à sa partie supérieure; il s'entr'ouvre peu à peu, de manière à prendre la forme d'un U; ses extrémités émettent vers 6^{mm} deux petits faisceaux.

Hyoscyamus niger L. (Pl. V, fig. 66.)

$L = 18^{mm}$; $l = 2^{mm}$; $e = 1^{mm}45$. — Poils unisériés de 1^{mm}. Le collenchyme n'existe que dans les lobes supérieurs. Le parenchyme cortical, formé de cellules arrondies, méatiques, renferme des granulations cristallines comme dans toutes les Solanées, et de plus des cristaux isolés et quelques mâcles. Le système libéro-ligneux se compose d'un faisceau médian et de quatre faisceaux latéraux.

Le système libéro-ligneux a la même disposition à l'initiale qu'à la caractéristique.

3° CESTRINÉES.

Nicotiana glauca Grah. (Pl. V, fig. 66.)

L = 80^{mm}; l = 4^{mm}; e = 3^{mm}5. — Poils nuls. La caractéristique est un cercle aplati en haut. La membrane externe est épaisse (12 μ). Au-dessous de l'épiderme, on trouve une ou deux assises de cellules chlorophylliennes, puis une couche de grandes cellules collenchymateuses. Le tissu conjonctif, formé de grandes cellules polygonales, méatiques, contient des granulations cristallines. Le système libéro-ligneux se compose d'un faisceau bicollatéral en forme de V très ouvert, dont chaque branche est surmontée d'un petit faisceau collatéral.

L'initiale présente la même disposition. La forme du faisceau médian est un peu différente de celle qu'il offre à la caractéristique : c'est un arc de cercle. On voit que le système libéro-ligneux ne varie pour ainsi dire pas, dans toute la longueur du pétiole.

4° SALPIGLOSSIDÉES.

Nierembergia rivularis. (Pl. V, fig. 68.)

L = 21^{mm}; l = 1^{mm}1; e = 0^{mm}7. — Poils de 300 μ, unisériés, formés de trois ou quatre cellules. Il n'y a pas de collenchyme. Le parenchyme cortical très méatique ne renferme pas de cristaux. Le système libéro-ligneux se compose d'un faisceau médian bicollatéral et de quatre petits faisceaux latéraux.

L'initiale ne possède qu'un faisceau en forme de C.

Caractères communs. — On peut, à l'exemple de MM. Bentham et Hooker, diviser les Solanées en cinq tribus, ou en quatre comme le font certains auteurs qui réunissent les Solanées aux Atropées.

Nous avons examiné des représentants de ces diverses tribus, et nous avons constaté dans tous l'existence de cristaux pulvérulents (exc. *Nierembergia rivularis)*, de collenchyme, d'un faisceau bicollatéral en arc plus ou moins développé, accompagné parfois de deux ou quatre petits faisceaux supérieurs. Le sclérenchyme et les fibres épaisses font défaut.

CONVOLVULACÉES.

Convolvulus sepium L. (Pl. VI, fig. 12.)

L = 40^{mm}; l = $1^{mm}75$; e = $1^{mm}60$. — Poils nuls. La caractéristique est un cercle légèrement échancré à sa partie supérieure. Il existe une couche de collenchyme séparée de l'épiderme par une assise de cellules chlorophylliennes. Le parenchyme cortical se compose de cellules arrondies, méatiques. Le système libéro-ligneux, dépourvu de sclérenchyme, comprend un faisceau médian bicollatéral disposé en arc de cercle, et quatre faisceaux latéraux. Les cristaux font défaut.

A l'initiale on retrouve la même disposition, sauf qu'il n'existe que deux faisceaux latéraux; les deux supérieurs n'apparaissent que plus loin.

Convolvulus arvensis L.

L = 10^{mm}; l = $1^{mm}05$; e = 1^{mm}. — Poils nuls. Ce pétiole présente les mêmes caractères que le précédent, en particulier il ne renferme pas de cristaux. La caractéristique nous offre une petite différence : il n'y a que deux faisceaux latéraux au lieu de quatre.

Ipomæa Batatas. (Pl. VI, fig. 13.)

L = 160^{mm}; l = $3^{mm}5$; e = $3^{mm}3$. — Petits poils glanduleux. La caractéristique est ronde, avec une échancrure à sa partie supérieure. Elle nous montre une couche de collenchyme, séparée de l'épiderme par une assise de cellules contenant soit de la chlorophylle, soit de grosses mâcles d'oxalate de chaux. Le parenchyme cortical est formé de grandes cellules polygonales, méatiques; on y trouve quelques mâcles, mais celles-ci sont bien plus nombreuses dans le liber. Le système libéro-ligneux se compose d'un faisceau bicollatéral médian, légèrement courbé, et de deux faisceaux bicollatéraux disposés symétriquement à la partie supérieure. n'y a pas de sclérenchyme.

Le système libéro-ligneux présente à l'initiale la même disposition qu'à la caractéristique.

Ipomæa Learii.

L = 130^{mm}; l = $3^{mm}1$; e = $2^{mm}64$. — La caractéristique ressemble à celle de l'*I. Batatas;* la structure du pétiole est également la même, mais les cristaux du parenchyme cortical sont ici beaucoup plus nombreux que chez l'espèce précédente.

Caractères communs. — D'après ces deux genres, qui comprennent près des trois quarts des Convolvulacées, nous pouvons indiquer les caractères de cette famille. Le pétiole y présente la même structure que chez les Solanées. On y trouve du collenchyme et des faisceaux bicollatéraux; on n'y rencontre ni sclérenchyme ni fibres épaisses.

Elles renferment fréquemment des cellules laticifères superposées en files, ce qui les distingue des Solanées. Elles en diffèrent encore les unes par l'absence de cristaux *(Convolvulus)*, les autres par la présence de mâcles *(Ipomæa)* : aucune ne contient de cristaux pulvérulents.

POLÉMONIÉES.

Cobæa scandens. (Pl. VI, fig. 11.)

L = 10^{mm}; l = $1^{mm}58$; e = $1^{mm}58$. — La caractéristique est un cercle, avec deux lobes à la partie supérieure. Le collenchyme n'est pas nettement caractérisé. Le parenchyme cortical se compose de cellules polygonales, peu méatiques, à parois minces. Le système libéro-ligneux ne comprend qu'un faisceau très développé, bicollatéral et dépourvu de sclérenchyme. Le pétiole du *C. scandens* ne renferme ni cristaux ni sclérenchyme.

L'initiale, comme la caractéristique, ne présente qu'un seul faisceau bicollatéral.

Le *Cobæa scandens* nous montre que les Polémoniées se rapprochent des Solanées et des Convolvulacées par l'existence d'un faisceau bicollatéral et le défaut de sclérenchyme. Le *C. scandens* diffère des Solanées par le manque de granulations cristallines; il est plus rapproché des Convolvulacées dépourvues de mâcles *(Convolvulus)* que de celles qui en renferment *(Ipomæa)*.

HYDROPHYLLÉES.

Wigandia caracassana. (Pl. VI, fig. 10.)

L = 260mm; *l* = 10mm; *e* = 14mm. — Ce pétiole est couvert de petits poils; il en existe en outre à la partie supérieure de beaucoup plus grands qui peuvent atteindre 4mm. Il existe à la périphérie une douzaine d'assises de collenchyme. Le parenchyme cortical se compose de cellules arrondies, méatiques. Le système libéro-ligneux forme un anneau. Le liber n'existe que sur le côté externe de l'anneau; il renferme de petites mâcles. On trouve encore un faisceau central, intra-médullaire et une demi-douzaine de petits faisceaux latéraux, disposés au-dessus de l'anneau. Il n'y a pas de sclérenchyme. Les cellules médullaires sont grandes, polygonales, à parois minces.

Le système libéro-ligneux est disposé à l'initiale, en anneau circulaire. Il existe de plus un faisceau intra-médullaire et deux petits faisceaux latéro-supérieurs.

Hydrophyllum canadense. (Pl. VI, fig. 9.)

L = 110mm; *l* = 2mm30; *e* = 2mm15. — Poils nuls. Comme dans le *Wigandia caracassana*, il existe une couche hypodermique, mais très mince. Le parenchyme cortical se compose de cellules polyédriques, renfermant des grains d'amidon. Le système libéro-ligneux comprend un faisceau médian collatéral, en arc de cercle, et quatre petits faisceaux, disposés symétriquement au-dessus de lui. Il n'y a pas de sclérenchyme.

A l'initiale, nous retrouvons la même disposition du système libéro-ligneux. Les grains d'amidon sont encore plus abondants qu'à la caractéristique.

Les Hydrophyllées voisines, par la structure de leurs fleurs, des Solanées, Convolvulacées, Polémoniées, s'en distinguent aisément par leurs pétioles qui ne renferment pas de faisceaux bicollatéraux.

SCROPHULARINÉES.

1° VERBASCÉES.

Verbascum nigrum L. (Pl. V, fig. 69.)

$l = 6^{mm}$; $e = 3^{mm}5$. — Poils de deux sortes : 1° étoilés, pédonculés; 2° glanduleux, pédicellés. Le collenchyme n'est pas nettement caractérisé. Les cellules corticales sont rondes, méatiques, la plupart contiennent un petit cristal. Le système libéro-ligneux se compose d'un faisceau principal en forme de C et de six faisceaux latéraux disposés symétriquement. Tous ces faisceaux sont collatéraux, dépourvus de sclérenchyme, mais accompagnés de fibres épaisses.

2° ANTIRRHINÉES.

Calceolaria chelidonioides. (Pl. V, fig. 70.)

$L = 20^{mm}$; $l = 3^{mm}$; $e = 1^{mm}80$. — Il existe une couche hypodermique de collenchyme. Le parenchyme cortical est formé de grandes cellules polygonales à parois minces. Le système libéro-ligneux se compose d'un faisceau principal en forme de C, de deux faisceaux latéraux et de huit fascicules rangés parallèlement au bord supérieur. On ne trouve ni cristaux ni sclérenchyme.

Le faisceau médian et les fascicules existent à l'initiale, mais les faisceaux latéraux n'apparaissent que vers 10^{mm}; ce sont les branches du C qui leur donnent naissance.

Linaria cymbalaria Mill. (Pl. VI, fig. 1.)

$L = 40^{mm}$; $l = 1^{mm}$; $e = 1^{mm}$. — Poils nuls. La caractéristique est un cercle échancré à sa partie supérieure. Le parenchyme cortical est formé de grandes cellules, rondes, à parois minces. Il n'y a pas d'hypoderme. Le système libéro-ligneux ne comprend qu'un faisceau central, recourbé en arc, il est dépourvu de sclérenchyme.

L'initiale est ogivale; comme la caractéristique, elle ne possède qu'un faisceau.

Maurandia antirrhiniflora Willd. (Pl. VI, fig. 2.)

$L = 33^{mm}$; $l = 1^{mm}18$; $e = 1^{mm}08$. — Poils nuls. Il n'y a pas de collenchyme. Le système libéro-ligneux est disposé suivant un cercle ouvert à sa partie supérieure : il se compose de faisceaux distincts, unis entre eux par du liber. Les cristaux et le sclérenchyme font défaut.

A l'initiale, le système libéro-ligneux forme un arc; plus loin cet arc se ferme en anneau pour s'ouvrir ensuite de nouveau. On constate qu'à la base du pétiole le parenchyme médullaire est sclérifié.

Lophospermum scandens. (Pl. VI, fig. 3.)

$L = 50^{mm}$; $l = 2^{mm}25$; $e = 1^{mm}65$. — Poils de $0^{mm}5$, unisériés, comprenant trois ou quatre cellules. Le collenchyme fait défaut. Le système libéro-ligneux se compose, comme le précédent, de faisceaux distincts, reliés entre eux par du liber, qui dessine une ellipse interrompue à la partie supérieure.

A l'initiale, les faisceaux libéro-ligneux sont également distincts: il en existe cinq, unis par du liber, qui forme ici un anneau elliptique; à 25^{mm}, cet anneau est circulaire (sa forme changeant avec celle du pétiole); enfin, plus loin, l'anneau s'ouvre en haut, ses extrémités se recourbent en dedans, et les cinq faisceaux ligneux primitifs se désagrègent, pour ainsi dire, en fascicules.

Phygelius capensis Mey. (Pl. VI, fig. 4.)

$L = 15^{mm}$; $l = 1^{mm}8$; $e = 2^{mm}6$. — Petits poils glanduleux. Le système libéro-ligneux se compose d'un faisceau principal semi-circulaire et de fascicules latéro-supérieurs, au nombre de trois ou quatre de chaque côté.

A l'initiale, on ne trouve que le faisceau médian; il donne naissance presque immédiatement à deux faisceaux latéraux, qui se décomposent ensuite en trois ou quatre fascicules.

Scrophularia aquatica L. (Pl. VI, fig. 5.)

$L = 75^{mm}$; $l = 6^{mm}$; $e = 4^{mm}5$. — Poils glanduleux. La caractéristique a la forme d'un V à branches recourbées en dedans. Le

parenchyme cortical est formé de grandes cellules polygonales, à parois minces et à petits méats. Le système libéro-ligneux se compose de trois grands faisceaux. Le collenchyme est réduit à une assise.

A l'initiale, nous retrouvons le faisceau médian de la caractéristique; mais au lieu de deux faisceaux latéraux, il en existe six : de chaque côté, les deux supérieurs s'unissent d'abord entre eux, et se soudent ensuite au troisième.

Paulownia imperialis S. et Z. (Pl. VI, fig. 6.)

L = 150^{mm}; *l* = 5^{mm}; *e* = 5^{mm}5. — Poils glanduleux, pédicellés : les uns petits, de 20 μ; les autres grands, de 0^{mm}9. La caractéristique est elliptique, échancrée à la partie supérieure. Il existe une couche collenchymateuse de sept ou huit assises. Le parenchyme cortical est formé de cellules polygonales arrondies. Le système libéro-ligneux est disposé en anneau; dans son intérieur on trouve deux faisceaux. Les cellules médullaires sont arrondies, plus grandes que les cellules corticales. Je dois ajouter qu'on rencontre quelques cristaux, fort petits, dans le tissu conjonctif et dans le liber.

A l'initiale, comme à la caractéristique, le système libéro-ligneux est disposé en anneau; les faisceaux intra-médullaires n'existent pas encore; ils naissent plus loin de la partie supérieure de l'anneau.

Penstemon speciosus. (Pl. VI, fig. 7.)

L = 40^{mm}; *l* = 2^{mm}30; *e* = 1^{mm}80. — Poils nuls. La membrane externe est épaisse (10 μ). Il existe une ou deux assises collenchymateuses. Le système libéro-ligneux se compose d'un faisceau médian principal et de six faisceaux latéraux.

A l'initiale la disposition est la même; les faisceaux latéraux sont moins nombreux.

3° RHINANTHÉES.

Digitalis purpurea L. (Pl. VI, fig. 8.)

Le pétiole est mal délimité à cause de la décurrence du limbe. *l* = 2^{mm}3; *e* = 2^{mm}3. — Poils de deux sortes : 1° unisériés de

$0^{mm}85$; 2', glanduleux, pédicellés de 40 μ. On trouve une ou deux assises de collenchyme principalement à la partie supérieure et à la partie inférieure. Le système libéro-ligneux se compose d'un faisceau central en forme de C et de deux faisceaux latéraux. Il n'existe ni cristaux ni sclérenchyme.

Le système libéro-ligneux présente la même disposition dans toute la longueur du pétiole.

Caractères communs. — Comme dans les Solanées, le sclérenchyme fait défaut; il en est de même ordinairement des fibres épaisses. Le collenchyme hypodermique existe. On y trouve aussi un faisceau médian prépondérant. Mais les Personées diffèrent des Solanées, parce que leurs faisceaux libéro-ligneux sont collatéraux, et parce qu'elles ne renferment pas de cristaux pulvérulents.

Nous venons de voir qu'il existe dans toutes les Personées un faisceau médian principal. Mais on remarque que ce faisceau est beaucoup plus développé et forme presque un cercle dans les plantes grimpantes *(Maurandia antirrhiniflora, Lophospermum scandens)*; le cercle est complet dans les plantes arborescentes *(Paulownia)*.

BIGNONIACÉES.

Bignonia grandiflora. (Pl. VI, fig. 29.)

$L = 60^{mm}$; $l = 2^{mm}7$; $e = 3^{mm}2$. — Poils nuls. La caractéristique a la forme d'une ellipse aplatie à la partie supérieure. On trouve à la périphérie une couche de collenchyme mal caractérisé. Le parenchyme cortical se compose de cellules elliptiques aplaties dans le sens radial. Il renferme de nombreux cristaux isolés. Le système libéro-ligneux se compose d'un grand anneau et de quatre petits faisceaux latéro-supérieurs. Les fibres scléreuses forment des îlots à la périphérie de l'anneau; les faisceaux supérieurs en sont également pourvus. Les cellules médullaires sont polygonales, à parois minces, et à petits méats; elles renferment, principalement dans le voisinage de l'anneau ligneux, des cristaux isolés en forme de prisme très allongé.

Le système libéro-ligneux forme à l'initiale un anneau présentant à sa partie supérieure deux éminences, d'où naissent les faisceaux accessoires.

Catalpa bignonioides Walt. (Pl. VI, fig. 30.)

$L = 115^{mm}$; $l = 3^{mm}5$; $e = 4^{mm}2$. — On trouve quelques poils sur le pétiole. La caractéristique est ovale, son pôle obtus inférieur. Les différents tissus offrent les mêmes caractères que dans le *Bignonia grandiflora*. Le système libéro-ligneux est disposé en anneau, et l'on trouve, comme dans le *Paulownia imperialis,* deux faisceaux intra-médullaires qui naissent de la partie supérieure de l'anneau. Mais, outre que la forme de la caractéristique n'est pas la même, on pourra distinguer ces deux pétioles par la présence du sclérenchyme dans le *Catalpa*. On trouve dans le parenchyme cortical des cristaux isolés; beaucoup affectent la forme de prismes allongés, comme dans le *Bignonia*. Les cellules médullaires sont grandes, polygonales et dépourvues de cristaux.

D'après ces deux exemples, il est probable que les Bignoniacées diffèrent des Solanées par leurs faisceaux collatéraux, leur sclérenchyme et leurs cristaux pulvérulents; elles s'en rapprochent par la disposition de leur système libéro-ligneux.

ACANTHACÉES.

Thunbergia alata Boyer. (Pl. VI, fig. 32.)

$L = 70^{mm}$; $l = 2^{mm}65$; $e = 2^{mm}$. — Poils de deux sortes : 1° unisériés; 2° glanduleux, sessiles. Il existe du collenchyme, principalement à la partie inférieure et à la partie supérieure du pétiole. Les cellules du parenchyme cortical renferment des raphides. Les faisceaux libéro-ligneux sont au nombre de cinq; ils sont reliés entre eux par une couche de liber à peu près continue, mais qui fait complètement défaut entre les deux faisceaux supérieurs; de sorte que l'ensemble a l'aspect d'un anneau ouvert en haut. Il existe de plus six faisceaux latéraux. On n'aperçoit pas de collenchyme.

A l'initiale, le système libéro-ligneux présente la même disposi-

tion, mais il n'existe que deux faisceaux latéraux, qui en se ramifiant donnent naissance aux quatre autres.

Acanthus mollis L. (Pl. VI, fig. 31.)

$L = 660^{mm}$; $l = 7^{mm}$; $e = 8^{mm}$. — Poils nuls. L'hypoderme comprend de cinq à huit assises de cellules collenchymateuses bien caractérisées. Le parenchyme cortical se compose de grandes cellules polygonales, arrondies, à parois minces. Le système libéro-ligneux forme un anneau surmonté de deux faisceaux. Les cellules médullaires sont rondes ou elliptiques. On y trouve quelques petits cristaux en bâtonnets. Il existe quelquefois un faisceau libérien intra-médullaire. Le sclérenchyme fait défaut.

A l'initiale, on trouve encore un anneau libéro-ligneux et quatre faisceaux latéraux, dont les deux inférieurs finissent par se souder à l'anneau.

Les deux pétioles d'Acanthacées que je viens d'étudier se rapprochent de ceux des Scrophulariacées par l'absence de cristaux et de sclérenchyme, par la disposition du système libéro-ligneux, qui forme un anneau plus ou moins complet.

VERBÉNACÉES.

Lippia citriodora.

$l = 1^{mm}55$; $e = 1^{mm}55$. — Le pétiole est fort petit, presque nul. Poils unicellulaires à la partie supérieure du pétiole. Le système libéro-ligneux se compose d'un arc de cercle, surmonté de deux petits faisceaux. Il existe, en outre, dans l'intérieur de l'arc de cercle, une rangée de petits faisceaux libériens. On ne trouve ni sclérenchyme ni cristaux.

Callicarpa japonica. (Pl. VI, fig. 33.)

$L = 8^{mm}$; $l = 2^{mm}05$; $e = 1^{mm}8$. — Il existe une couche hypodermique, formée de trois à cinq assises de cellules collenchymateuses. Le parenchyme cortical et la moelle sont formés de cellules rondes ou elliptiques, renfermant des mâcles, et surtout de gros cristaux isolés. Le système libéro-ligneux se compose

d'un anneau semi-circulaire et de deux faisceaux latéro-supérieurs. L'anneau et les faisceanx possèdent du sclérenchyme.

A l'initiale, nous retrouvons la même disposition du système libéro-ligneux, seulement les faisceaux latéraux sont plus étroits et le faisceau central ne forme pas encore un anneau, il figure un C.

Vitex Agnus castus L. (Pl. VI, fig. 35.)

$L = 70^{mm}$; $l = 1^{mm}50$; $e = 1^{mm}48$. — La caractéristique est un cercle aplati à la partie supérieure. Le système libéro-ligneux est représenté par un faisceau unique en forme d'U. Sa partie libérienne est doublée de fibres scléreuses. A l'intérieur de l'U on trouve quatre ou cinq faisceaux libériens avec quelques fibres scléreuses au centre. On trouve quelques mâcles dans le parenchyme cortical.

A l'initiale, le système libéro-ligneux se compose d'un arc de cercle et de deux faisceaux que l'arc, en grandissant, finit par rejoindre. On n'y trouve pas de sclérenchyme.

Clerodendron fœtidum. (Pl. VI, fig. 34.)

$L = 16^{mm}$; $l = 2^{mm}5$; $e = 2^{mm}5$. — Poils glanduleux, sessiles. L'hypoderme comprend deux à quatre assises de cellules collenchymateuses, bien caractérisées. La portion principale du système libéro-ligneux est disposée en triangle dont les sommets sont tronqués. Ce triangle est formé par une dizaine de faisceaux distincts, reliés entre eux par du liber. Il existe, en outre, quatre faisceaux latéro-supérieurs. On trouve dans la moelle et dans le parenchyme cortical des cristaux isolés. Il n'y a pas de sclérenchyme.

A l'initiale, les faisceaux libéro-ligneux sont disposés sur une demi-circonférence; il existe aussi deux faisceaux supéro-latéraux; plus loin, la demi-circonférence se ferme en anneau triangulaire; puis les deux faisceaux latéraux se dédoublent, les deux moitiés inférieures se portant vers l'anneau.

LABIÉES.

1° OCIMOIDÉES.

Ocimum basilicum L. (Pl. VI, fig. 42.)

$L = 16^{mm}$; $l = 2^{mm}30$; $e = 2^{mm}08$. — Poils unisériés atteignant $0^{mm}5$. Il existe dans la plus grande partie du pétiole une assise hypodermique, mais celle-ci fait défaut dans les lobes supérieurs. Le parenchyme cortical se compose de grandes cellules arrondies, méatiques, à parois minces; il ne renferme pas de cristaux. Dans les lobes, ces cellules sont plus petites et contiennent de la chlorophylle. Le système libéro-ligneux se compose d'un faisceau principal en arc de cercle et de deux faisceaux latéro-supérieurs; il n'y a pas de sclérenchyme.

A l'initiale le système libéro-ligneux présente la même disposition.

2° SATURÉINÉES.

Perilla nankinensis Dcne. (Pl. VI, fig. 36.)

$L = 60^{mm}$; $l = 2^{mm}25$; $e = 1^{mm}9$. — Poils de deux sortes : 1° unisériés; 2° glanduleux, presque sessiles. Les uns et les autres sont beaucoup plus abondants à la partie supérieure. Il existe une couche collenchymateuse de deux ou trois assises d'épaisseur. Le parenchyme cortical est formé, à la périphérie, de cellules elliptiques, à parois un peu épaisses; dans la partie centrale de la caractéristique, on trouve des cellules polygonales à parois minces; au voisinage du bois, ces cellules renferment de l'amidon et de nombreux petits cristaux aciculaires. Le système libéro-ligneux se compose, comme dans l'*Ocimum basilicum*, d'un grand faisceau en forme de C, et de deux faisceaux latéro-supérieurs; mais il existe ici des fibres scléreuses qui font défaut dans l'espèce précédente; de plus, on constate au milieu du faisceau en C, une dépression et une interruption dans le bois, le liber et le sclérenchyme. Nous retrouverons dans d'autres Labiées, au milieu de l'arc libéro-ligneux, un intervalle beaucoup plus grand qui le partage en deux faisceaux distincts. Cette disposition que nous n'avons pas encore rencontrée, est fréquente au

contraire chez les Labiées, et permet de reconnaître immédiatement la famille d'un grand nombre de ces plantes.

A l'initiale, le pétiole du *P. nankinensis* montre la même disposition qu'à la caractéristique.

3° MONARDÉES.

Salvia verbenaca L. (Pl. VI, fig. 38.)

La longueur du pétiole est variable, elle atteint 55^{mm} chez les feuilles inférieures et devient nulle chez les feuilles supérieures. La description suivante est faite d'après un grand pétiole.

$L = 55^{mm}$; $l = 2^{mm}6$; $e = 1^{mm}8$. — Poils de trois sortes : 1° petits, unisériés, de 125 μ; 2° grands, unisériés, de $1^{mm}8$ placés aux lobes supérieurs; 3° glanduleux de 35 μ. On aperçoit à la périphérie du pétiole une assise à peu près continue de collenchyme. Dans les lobes, il y en a plusieurs assises. Le parenchyme cortical se compose de cellules polygonales, méatiques, à parois minces. Le système libéro-ligneux comprend deux gros faisceaux inférieurs, disposés symétriquement, et deux faisceaux latéro-supérieurs. Il n'y a pas de faisceau médian. On ne voit ni sclérenchyme ni cristaux.

A l'initiale, on retrouve les faisceaux que nous avons signalés à la caractéristique. Il existe en outre de chaque côté, entre le gros faisceau inférieur et le faisceau supérieur, un troisième faisceau intercalaire, qui finit par se souder avec l'inférieur.

Salvia pratensis L. (Pl. VI, fig. 37.)

$L = 55^{mm}$; $l = 3^{mm}5$; $e = 3^{mm}$. — Poils unisériés. La caractéristique présente les mêmes caractères que dans l'espèce précédente. Le système libéro-ligneux se compose d'une partie centrale, disposée en arc fendu au milieu, et de quatre faisceaux supéro-latéraux. Il existe des fibres épaisses.

4° NÉPÉTÉES.

Glechoma hederacea L. (Pl. VI, fig. 41.)

$L = 25^{mm}$; $l = 1^{mm}$; $e = 0^{mm}92$. — Poils unisériés, de $0^{mm}9$. On trouve du collenchyme à la partie inférieure et dans les lobes

supérieurs. Le système libéro-ligneux se compose de cinq faisceaux dépourvus de sclérenchyme. Il n'y a pas de cristaux.

Le système libéro-ligneux débute par trois faisceaux, qui correspondent aux faisceaux médians et supérieurs de la caractéristique; à 5^{mm} le faisceau médian donne naissance aux deux faisceaux intercalaires.

5° STACHYDÉES.

Scutellaria Sp. (Pl. VI, fig. 43.)

$L = 22^{mm}$; $l = 1^{mm}08$; $e = 1^{mm}12$. — Poils de deux sortes : 1° étoilés; 2° glanduleux. Le système libéro-ligneux se compose de quatre faisceaux; les deux inférieurs G, D sont très gros, on voit accolés à leur face interne deux fascicules (*d*, *g*), dont le bois est dirigé en bas.

Le système libéro-ligneux présente à l'initiale la même disposition; les fascicules *d*, *g* n'existent pas encore : ils naissent plus loin des faisceaux D et G, dont l'extrémité supérieure s'incurve, puis se détache pour former un fascicule distinct.

Brunella vulgaris L. (Pl. VI, fig. 39.)

$L = 10^{mm}$; $l = 1^{mm}18$; $e = 0^{mm}95$. — Poils unisériés, de 500 μ. On trouve du collenchyme aux lobes supérieurs. Le système libéro-ligneux se compose d'un gros faisceau médian, un peu arqué, et de quatre petits faisceaux latéraux. Il n'y a ni cristaux ni sclérenchyme.

L'initiale présente la même disposition. Il n'existe cependant que deux faisceaux latéraux, qui plus loin donnent naissance à deux faisceaux plus petits, situés au-dessus d'eux.

Marrubium vulgare L. (Pl. VI, fig. 40.)

$L = 0^{mm}5$; $l = 2^{mm}8$; $e = 1^{mm}$. — Poils de deux sortes : 1° unisériés, laineux de 2^{mm}; 2° glanduleux, pédicellés de 30 μ. Les lobes supérieurs renferment un peu de collenchyme. Le système libéro-ligneux est disposé comme chez le *Salvia verbenaca*. Il n'y a pas de faisceau médian; il existe deux gros faisceaux inférieurs et quatre petits faisceaux supéro-latéraux.

Nous retrouvons à l'initiale la même disposition du système libéro-ligneux.

Stachys sylvatica L.

$L = 50^{mm}$; $l = 1^{mm}90$; $e = 1^{mm}4$. — Poils de deux sortes : 1° glanduleux, sessiles; 2° unisériés, de $1^{mm}15$. On trouve du collenchyme dans les lobes supérieurs. Il en existe aussi une ou deux assises à la partie inférieure de la caractéristique. Le système libéro-ligneux se compose d'un faisceau médian légèrement arqué, et de deux faisceaux supérieurs. Il n'y a ni cristaux ni sclérenchyme.

Le système libéro-ligneux présente à l'initiale la même disposition qu'à la caractéristique.

Betonica Sp.

$L = 55^{mm}$; $l = 1^{mm}5$; $e = 2^{mm}3$. — Poils de deux sortes : 1° glanduleux; 2° unisériés, de $1^{mm}15$. Le parenchyme cortical formé de cellules rondes, méatiques, présente à la partie supérieure une grande lacune. Le système libéro-ligneux se compose essentiellement de trois faisceaux principaux : un central, bien développé, courbé en arc, et deux plus petits, situés dans les lobes latéraux. On trouve en outre deux fascicules intercalaires. Le faisceau central possède quelques fibres scléreuses. Il n'y a pas de cristaux.

Nous retrouvons à l'initiale la même disposition des faisceaux libéro-ligneux.

Leonurus glaucescens Bung.

$L = 34^{mm}$; $l = 1^{mm}7$; $e = 0^{mm}8$. — Poils de deux sortes : 1° unisériés, de 1^{mm}; 2° glanduleux. La caractéristique est sinueuse et présente un ombilic à sa partie inférieure. On trouve un peu de collenchyme aux lobes supérieurs. Le système libéro ligneux se compose de six faisceaux disposés symétriquement et correspondant aux parties saillantes de la caractéristique. On ne voit ni sclérenchyme ni cristaux.

Le système libéro-ligneux débute par quatre faisceaux. A 52^{mm},

les deux faisceaux supérieurs émettent deux faisceaux plus petits qui se placent au-dessus d'eux.

Moluccella lævis L.

$L = 25^{mm}$; $l = 1^{mm}40$; $e = 1^{mm}$. — Le système libéro-ligneux se compose de quatre faisceaux. Le sclérenchyme et les cristaux font défaut.

A l'initiale, même disposition du système libéro-ligneux qu'à la caractéristique.

Ballota fœtida Lamk.

$L = 8^{mm}$; $l = 1^{mm}30$; $e = 0^{mm}5$. — Poils de deux sortes : 1° unisériés, pouvant atteindre 500 μ, composés de une à trois cellules; 2° glanduleux, de 30 μ, brièvement pédicellés. La caractéristique présente un ombilic à sa partie inférieure. Le système libéro-ligneux se compose de quatre faisceaux dépourvus de sclérenchyme. Il n'y a pas de cristaux.

On trouve également à l'initiale quatre faisceaux libéro-ligneux qui restent parallèles dans toute la longueur du pétiole.

Phlomys chrysophylla Boiss.

$L = 60^{mm}$; $l = 2^{mm}$; $e = 2^{mm}2$. — Poils de deux sortes : 1° étoilés, pédonculés; 2° glanduleux, pédicellés. On ne trouve de cellules nettement collenchymateuses que dans les lobes supérieurs. Le parenchyme cortical est formé de cellules méatiques, rondes ou légèrement polygonales. Il ne renferme pas de cristaux et présente une lacune à sa partie supérieure. Le système libéro-ligneux se compose de six faisceaux disposés symétriquement, il est dépourvu de sclérenchyme.

A l'initiale, il n'existe que quatre faisceaux qui correspondent aux faisceaux inférieurs et supérieurs de la caractéristique. Les faisceaux intercalaires naissent des faisceaux inférieurs, à quelques millimètres en avant de la caractéristique.

Caractères communs. — Le pétiole des Labiées possède habituellement des poils glanduleux On y trouve d'ordinaire une couche de collenchyme dont l'épaisseur varie avec les espèces.

Les cristaux et le collenchyme font défaut (excepté chez le *Perilla nankinensis*). Tantôt il existe un faisceau médian, prépondérant, tantôt il n'en existe pas. Cette dernière disposition est particulière aux Labiées.

BORRAGINÉES.

Heliotropium europœum L. (Pl. VI, fig. 44.)

$L = 18^{mm}$; $l = 0^{mm}95$; $e = 0^{mm}95$. — Pétiole velu. On trouve à la périphérie une ou deux assises de cellules chlorophylliennes. En haut et en bas du pétiole, on trouve en dedans de cette couche quelques cellules de collenchyme. Le parenchyme cortical formé de cellules méatiques, polygonales, à parois minces, ne renferme pas de cristaux. Le système libéro-ligneux se compose d'un faisceau en demi-cercle ; il est dépourvu de sclérenchyme.

A l'initiale, nous retrouvons le faisceau unique de la caractéristique.

Cynoglossum pictum Ait. (Pl. VI, fig. 43.)

$L = 120^{mm}$; $l = 6^{mm}$; $e = 5^{mm}$. — Il n'y a pas de collenchyme. Le sclérenchyme et les cristaux font défaut. Il existe trois faisceaux principaux (un médian inférieur, deux latéraux) et six fascicules.

Symphytum officinale L.

$L = 350^{mm}$; $l = 4^{mm}5$; $e = 5^{mm}5$. — Pétiole velu. On trouve sous l'épiderme une couche de collenchyme plus épaisse à la partie inférieure qu'à la partie supérieure. Le système libéro-ligneux se compose de sept faisceaux principaux et de quelques fascicules. Il y a des fibres épaisses.

L'initiale présente la même disposition.

Le pétiole du *Symphytum caucasicum* possède la même structure que celui du *S. officinale*.

Borrago officinalis L. (Pl. VI, fig. 47.)

$L = 150^{mm}$; $l = 4^{mm}$; $e = 4^{mm}$. — Poils pouvant atteindre 5^{mm}. Il n'y a ni cristaux ni sclérenchyme. Le système libéro-ligneux

se compose d'un faisceau médian arqué et de six faisceaux latéraux.

Anchusa sempervirens L. (Pl. VI, fig. 48.)

$L = 55^{mm}$; $l = 3^{mm}$; $e = 4^{mm}$. — Poils unisériés de 1^{mm}. On trouve du collenchyme à la partie inférieure et sur les côtés. Le système libéro-ligneux se compose de cinq faisceaux principaux et quatre fascicules. Il n'y a ni cristaux ni sclérenchyme.

Cordia sebestana. (Pl. VI, fig. 49.)

$L = 12^{mm}$; $l = 2^{mm}3$; $e = 2^{mm}5$. — Le collenchyme forme au-dessous de l'épiderme une couche continue. Les cristaux et le sclérenchyme font défaut. J'appellerai l'attention sur la disposition du système libéro-ligneux : à l'initiale, il forme un demi-cercle; à la caractéristique, un anneau continu; tandis que dans les autres Borraginées, il se compose de plusieurs faisceaux distincts et rangés en fer à cheval. Or les Borraginées sont en général herbacées, tandis que les *Cordia* sont arborescents. Voilà encore un fait qui vient à l'appui de la règle que j'ai formulée sur la différence d'arrangement des faisceaux dans les plantes ligneuses et les plantes herbacées.

Caractères communs. — Le pétiole des Borraginées présente les mêmes caractères généraux que celui des Labiées. Je n'y ai pas constaté, comme dans cette dernière famille, l'absence de faisceau impair, médian.

APOCYNÉES.

Vinca minor L. (Pl. VI, fig. 18.)

$L = 4^{mm}$; $l = 1^{mm}5$; $e = 0^{mm}82$. — Poils unicellulaires de 80 μ, placés à la partie supérieure. On trouve à la périphérie une couche de collenchyme formée de trois assises. Le parenchyme cortical se compose de cellules elliptiques, méatiques, à parois épaisses. Le système libéro-ligneux ne comprend qu'un faisceau bicollatéral en forme de V très ouvert. Le liber renferme des laticifères, dont

le latex coagulé est visible sur des coupes transversales. Il n'y a ni sclérenchyme ni cristaux.

A l'initiale comme à la caractéristique, le système libéro-ligneux ne se compose que d'un faisceau.

Vinca major L.

$L = 8^{mm}$; $l = 1^{mm}8$; $e = 1^{mm}5$. — Poils unisériés de $0^{mm}5$. On trouve ici la même disposition que dans le *V. minor*, notamment un faisceau bicollatéral arqué qui renferme des laticifères.

Lochnera rosea. (Pl. VI, fig. 21.)

$L = 8^{mm}$; $l = 2^{mm}20$; $e = 1^{mm}60$. — Poils unisériés de $0^{mm}5$. Le collenchyme n'est pas bien caractérisé. Le parenchyme cortical est formé de cellules rondes, méatiques, dépourvues de cristaux. Le système libéro-ligneux se compose d'un faisceau bicollatéral dépourvu de sclérenchyme.

L'initiale présente la même disposition du système libéro-ligneux.

Tabernæmontana citrifolia.

$L = 2^{mm}$; $l = 1^{mm}20$; $e = 1^{mm}20$. — Poils nuls. Il n'y a pas de collenchyme. On trouve des mâcles d'oxalate de chaux dans le parenchyme cortical.

Le système libéro-ligneux est représenté par un faisceau bicollatéral dessinant une demi-circonférence.

Nerium oleander L. (Pl. VI, fig. 19.)

$L = 6^{mm}$; $l = 2^{mm}7$; $e = 1^{mm}6$. — Poils unicellulaires de 100 μ, principalement sur le côté supérieur. La membrane externe est très épaisse (20 μ). Les cellules épidermiques sont très petites. L'hypoderme collenchymateux comprend six ou huit assises. Le parenchyme cortical est formé de cellules rondes méatiques, à parois épaisses; il renferme des mâcles et des grains d'amidon. Le système libéro-ligneux se compose d'un faisceau médian bicollatéral en forme de V, et de deux petits faisceaux latéraux. On aperçoit des cristaux isolés dans le liber du faisceau central.

On trouve également à l'initiale un grand faisceau médian et deux petits faisceaux latéraux.

Apocynum venetum. (Pl. VI, fig. 20.)

$L = 2^{mm}$; $l = 1^{mm}$; $e = 0^{mm}7$. — Poils nuls. La caractéristique est semi-lunaire. Le parenchyme cortical ne renferme pas de cristaux. Le système libéro-ligneux se compose d'un faisceau unique, bicollatéral, en forme d'arc de cercle.

Caractères communs. — Les Apocynées ont un faisceau principal bicollatéral, comme les Solanées et les Convolvulacées. Elles se distinguent de ces deux familles par leurs laticifères fibreux. Elles diffèrent encore de la première par l'absence de cristaux pulvérulents. Comme dans les Convolvulacées, certains genres renferment des mâcles, d'autres en sont dépourvus.

ASCLÉPIADÉES.

Periploca græca L.

$L = 12^{mm}$; $l = 1^{mm}70$; $e = 1^{mm}50$. — Poils nuls. La caractéristique est à peu près ronde, échancrée à sa partie supérieure. Le parenchyme cortical est composé de cellules rondes, méatiques; on y trouve des laticifères. Le système libéro-ligneux ne comprend qu'un faisceau bicollatéral, courbé en arc de cercle, dépourvu de sclérenchyme. Le liber renferme de nombreux petits cristaux isolés.

Asclepias curassavica L.

$L = 8^{mm}$; $l = 1^{mm}9$; $e = 2^{mm}05$. — Pétiole velu. Le parenchyme cortical renferme des mâcles. Le système libéro-ligneux se compose d'un grand faisceau bicollatéral en forme de demi-circonférence et de deux fascicules supérieurs. Il n'y a pas de sclérenchyme.

Asclepias Douglasii Hook.

$L = 15^{mm}$; $l = 4^{mm}7$; $e = 4^{mm}$. — Poils nuls. Le pétiole, quoique plus gros que dans l'espèce précédente, présente les

mêmes caractères. Le parenchyme cortical renferme des mâcles et des laticifères. Le système libéro-ligneux se compose d'un seul faisceau qui forme un grand arc de cercle.

Vincetoxicum nigrum Mœnch. (Pl. VI, fig. 15.)

$L = 8^{mm}$; $l = 2^{mm}5$; $e = 2^{mm}$. — Poils unisériés de 300 μ. La caractéristique a la forme d'une demi-lune avec une petite échancrure au milieu de son bord rectiligne. Le parenchyme renferme des mâcles. Le système libéro-ligneux se compose d'un grand faisceau bicollatéral et de deux petits faisceaux.

Le système libéro-ligneux a la même disposition à l'initiale. Celle-ci a la forme d'un croissant.

Le *Vincetoxicum officinale* présente les mêmes caractères que le *V. nigrum*.

Marsdenia erecta. (Pl. VI, fig. 16.)

$L = 40^{mm}$; $l = 2^{mm}3$; $e = 2^{mm}$. — La caractéristique a la forme d'une ellipse à petit axe vertical; elle est légèrement échancrée à la partie supérieure. Le parenchyme renferme des mâcles et des laticifères. Le système libéro-ligneux se compose d'un faisceau principal arqué et de deux petits faisceaux latéro-supérieurs.

L'initiale a la forme d'une demi-lune et est disposée comme à la caractéristique.

Hoya carnosa. (Pl. VI, fig. 14.)

$L = 15^{mm}$; $l = 5^{mm}2$; $e = 4^{mm}7$. — Poils nuls. La caractéristique a la forme d'un cercle, entaillé à sa partie supérieure; elle est entourée d'une épaisse couche de liège. Les cellules du parenchyme cortical sont rondes, à parois épaisses; elles renferment des mâcles d'oxalate de chaux et sont entremêlées de grosses cellules scléreuses, à parois très épaisses dont les couches concentriques et les canalicules sont très nets. Le système libéro-ligneux ne comprend qu'un faisceau arciforme, petit relativement aux dimensions du pétiole.

Caractères communs. — Les Asclépiadées présentent les mêmes

caractères que les Apocynées. Elles contiennent notamment des laticifères fibreux. Elles paraissent, d'après les espèces que nous avons étudiées, toujours renfermer des mâcles; tandis que ces cristaux font assez souvent défaut chez les Apocynées.

OLÉACÉES.

1° JASMINÉES.

Jasminum fruticans L. (Pl. VI, fig. 22.)

$L = 6^{mm}$; $l = 1^{mm}2$; $e = 0^{mm}8$. — La caractéristique a la forme d'un croissant. Au-dessous de l'épiderme existe une assise de collenchyme. Le parenchyme cortical est formé de cellules rondes, méatiques; il est dépourvu de cristaux. Le système libéro-ligneux se compose d'un faisceau principal arciforme et de deux ou quatre petits faisceaux latéraux. Il n'y a pas de sclérenchyme.

L'initiale a la forme d'une demi-lune et présente un grand faisceau surmonté de deux petits.

2° SYRINGÉES.

Forsythia suspensa Wahl. (Pl. VI, fig. 23.)

$L = 15^{mm}$; $l = 2^{mm}$; $e = 2^{mm}08$. — Poils nuls. La caractéristique, arrondie dans le bas, est échancrée dans le haut. Le parenchyme cortical est formé de cellules elliptiques, méatiques, dépourvues de cristaux. Le système libéro-ligneux, dépourvu de sclérenchyme, comprend un faisceau central courbé en arc et deux autres petits faisceaux.

L'initiale a la forme d'un croissant; on y retrouve la même disposition des faisceaux qu'à la caractéristique.

Syringa vulgaris L. (Pl. VI, fig. 24.)

$L = 20^{mm}$; $l = 1^{mm}55$; $e = 1^{mm}55$. — Poils nuls. Il existe une couche collenchymateuse comprenant deux à quatre assises. Le système libéro-ligneux se compose d'un grand faisceau arciforme, surmonté de deux ou quatre petits faisceaux latéraux. Il existe en outre, du côté concave de l'arc, deux petits faisceaux dont le bois est presque accolé à celui de l'arc.

L'initiale a la forme d'un croissant et possède un faisceau médian et deux fascicules latéraux.

3° FRAXINÉES.

Fraxinus excelsior L. (Pl. VI, fig. 25-26.)

$L = 50^{mm}$; $l = 2^{mm}15$; $e = 1^{mm}90$. — Poils nuls. Il existe une couche de collenchyme mal caractérisé. Le système libéro-ligneux se compose d'un anneau central et de quatre petits anneaux latéro-supérieurs Ces anneaux sont entourés de fibres scléreuses.

L'initiale a la forme d'un croissant. On y trouve de petits cristaux prismatiques. Le système libéro-ligneux y dessine un C; il est dépourvu de sclérenchyme. A 5^{mm}, le C, dont les extrémités se sont rejointes, forme un anneau entouré de fibres scléreuses. Il se produit ensuite à la partie supérieure et de chaque côté de cet anneau deux boucles (pl. VI, fig. 15), qui en se détachant forment les quatre petits anneaux de la caractéristique. Les deux petits anneaux inférieurs se détachent les premiers; l'un d'eux est déjà formé à 47^{mm}.

4° OLÉINÉES.

Phyllirea angustifolia L. (Pl. VI, fig. 27.)

$L = 2^{mm}$; $l = 1^{mm}$; $e = 0^{mm}90$. — Poils unicellulaires de 40 μ. La membrane externe est épaisse (15 μ). Le tissu cortical est collenchymateux. Il n'y a qu'un faisceau libéro-ligneux réniforme, le bois y est très développé. Le liber est doublé de quelques fibres scléreuses.

Le *Phyllirea latifolia* présente les mêmes caractères que le précédent. Le faisceau libéro-ligneux ne paraît pas aussi recourbé que dans le *P. angustifolia*.

Olea europæa L.

$L = 2^{mm}$; $l = 1^{mm}2$; $e = 1^{mm}2$. — Poils écailleux. La caractéristique est un cercle incomplet à la partie supérieure. La membrane externe est épaisse (15 μ). Le tissu cortical est collenchymateux; on aperçoit dans son épaisseur des fibres à parois épaisses, légère-

ment sclérifiées. Le système libéro-ligneux ne comprend qu'un faisceau légèrement arqué.

Ligustrum vulgare L. (Pl. VI, fig. 28.)

L = 3^{mm}; $l = 1^{mm}15$; $e = 0^{mm}80$. — On trouve à la partie supérieure quelques poils unicellulaires de 30 μ. Le système libéro-ligneux se compose d'un faisceau en arc et de deux fascicules latéro-supérieurs. Il n'y a pas de sclérenchyme.

A l'initiale le faisceau central existe seul.

Caractères communs. — On trouve parfois dans le pétiole des Oléinées, de petits cristaux *(Fraxinus excelsior)*. Il existe un faisceau médian principal. Le trajet des faisceaux est très simple : en général, sauf dans le genre *Fraxinus,* la disposition du système libéro-ligneux est la même dans les différentes tranches du pétiole. D'ordinaire, le sclérenchyme est nul; on en trouve cependant quelques fibres dans les feuilles persistantes *(Olæa, Phyllirea)*; il est exceptionnellement abondant chez le *Fraxinus*.

On remarque dans les feuilles persistantes citées ci-dessus, que la partie ligneuse du faisceau médian est relativement plus épaisse et plus dense que dans les Oléinées à feuilles caduques.

CAPRIFOLIACÉES.

1° SAMBUCÉES.

Sambucus Ebulus L. (Pl. VI, fig. 52.)

L = 50^{mm}; $l = 3^{mm}5$; $e = 3^{mm}2$. — Poils de $0^{mm}5$ unisériés, formés de cinq ou six cellules. La caractéristique est pentagonale, le côté supérieur est concave. Il existe aux sommets du polygone et vis-à-vis des faisceaux libéro-ligneux supérieurs des faisceaux de collenchyme. Le parenchyme cortical se compose de grandes cellules polygonales, méatiques, à parois minces. Il renferme des cristaux pulvérulents et des cellules tannifères. Le système libéro-ligneux comprend cinq faisceaux dépourvus de sclérenchyme.

L'initiale renferme, comme la caractéristique, cinq faisceaux.

Viburnum Tinus L.

$L = 15^{mm}$; $l = 2^{mm}30$; $e = 1^{mm}85$. — On trouve quelques poils au côté supérieur. La membrane externe est épaisse. On trouve, à la périphérie, une couche de collenchyme; elle est plus épaisse à la partie inférieure. Le parenchyme cortical est constitué par des cellules rondes, méatiques, à parois épaisses; il renferme des mâcles. Le système libéro-ligneux se compose d'un anneau, et de deux faisceaux latéro-supérieurs. On trouve à la partie inférieure de l'anneau quelques fibres non sclérifiées.

L'anneau de la caractéristique se forme comme nous l'avons vu dans le *Cytisus Laburnum* (pl. I, fig. 2), c'est-à-dire qu'il existe à l'initiale trois faisceaux distincts qui donnent naissance à deux autres faisceaux; tandis que les trois premiers se soudent en arc, les deux seconds se portent en haut et forment la corde de l'arc. En même temps, les extrémités de l'arc émettent deux branches qui forment les faisceaux supérieurs de la caractéristique.

Viburnum Opulus L. (Pl. VI, fig. 51.)

$L = 20^{mm}$; $l = 2^{mm}15$; $e = 2^{mm}$. — Poils glanduleux, pédicellés, situés sur le côté supérieur. Comme dans l'espèce précédente, on trouve à la périphérie un hypoderme collenchymateux. Le parenchyme contient des mâcles; le système libéro-ligneux se compose d'un anneau ouvert en haut, et de deux faisceaux latéro-supérieurs. Il n'y a pas de sclérenchyme.

En étudiant le trajet des faisceaux, nous allons nous rendre compte de la différence que présentent les caractéristiques des *Viburnum Tinus* et *Opulus*, l'une ayant un anneau libéro-ligneux fermé, l'autre un anneau ouvert. Dans le *V. opulus*, comme dans le *V. tinus*, les trois faisceaux initiaux donnent naissance à deux autres faisceaux qui se portent à la partie supérieure, se soudent aux extrémités de l'arc, mais ne s'étendent pas, ne se rejoignent pas pour dessiner la corde de cet arc.

Dans le *Viburnum Lantana*, comme dans le *V. opulus*, le système libéro-ligneux se compose d'un faisceau principal en

forme de C, et de deux faisceaux latéraux. Mais le premier se distingue facilement du second par des poils étoilés.

2° LONICÉRÉES.

Lonicera flava Sims. (Pl. VI, fig. 50.)

$L = 6^{mm}$; $l = 1^{mm}90$; $e = 1^{mm}40$. — Poils nuls. Membrane externe épaisse (10 μ). Le tissu cortical est formé en grande partie de cellules collenchymateuses. Le système libéro-ligneux ne comprend qu'un faisceau, disposé en arc très ouvert. On trouve des mâcles dans le parenchyme cortical et dans le liber. Il n'y a pas de sclérenchyme.

Le système libéro-ligneux débute par trois faisceaux.

Leycesteria formosa Wahl.

$L = 16^{mm}$; $l = 2^{mm}45$; $e = 2^{mm}65$. — Poils unicellulaires, à parois épaisses. Le parenchyme cortical est formé de cellules arrondies, dépourvues de méats. Le système libéro-ligneux se compose d'un grand faisceau arciforme et de deux fascicules. Le sclérenchyme fait défaut.

Le système libéro-ligneux débute par deux petits fascicules latéraux et trois gros faisceaux médians. Ces derniers s'unissent vers 6^{mm} pour former le faisceau principal de la caractéristique.

CARACTÈRES COMMUNS. — Nous avons constaté, dans les différents pétioles étudiés, l'absence de sclérenchyme, l'existence d'un hypoderme collenchymateux, la présence de mâcles (les *Sambucus* ne renferment que des cristaux pulvérulents). Comme les plantes de cette famille sont des arbres ou des arbrisseaux, le système libéro-ligneux est disposé en anneau ou en arc de cercle. Dans les *Sambucus* on trouve exceptionnellement des faisceaux isolés.

Je ferai remarquer que ces caractères sont aussi ceux des Cornées. Entre les *Viburnum* et les *Cornus* notamment l'analogie est encore plus grande, puisque dans ces deux genres le trajet des faisceaux a lieu d'après le même type. On sait du reste que les organes floraux des Caprifoliacées et des Cornées offrent de nombreuses ressemblances.

COMPOSÉES.

1° EUPATORIACÉES.

Hebeclinium urolepis D. C. (Pl. IV, fig. 53.)

$L = 35^{mm}$; $l = 2^{mm}85$; $e = 2^{mm}24$. — Poils glanduleux, pédicellés. Il existe deux assises hypodermiques de collenchyme anguleux. Le parenchyme cortical est formé de cellules polygonales à parois minces. Il est dépourvu de cristaux et de canaux sécréteurs. Le système libéro-ligneux se compose, sur un exemplaire, de neuf faisceaux principaux et de deux intercalaires. Ces faisceaux présentent à leurs pôles libériens des fibres épaisses.

2° INULOIDÉES.

Inula Helenium L. (Pl. VI, fig. 57.)

$l = 11^{mm}5$; $e = 14^{mm}$. — Poils unisériés de 1^{mm}. Le parenchyme cortical est formé de grandes cellules rondes, méatiques. On n'y trouve ni cristaux ni canaux sécréteurs. Le système libéro-ligneux se compose de treize faisceaux périphériques, disposés symétriquement, et d'une quinzaine de faisceaux placés en dedans et vis-à-vis des intervalles des premiers. En outre, on trouve des fascicules accolés au pôle interne des sept faisceaux périphériques inférieurs. Tous ces faisceaux sont munis, du côté externe, d'un croissant de sclérenchyme. Les plus gros possèdent en outre quelques fibres scléreuses à leur pôle ligneux.

3° HELIANTHOIDÉES.

Polymnia edulis Weld. (Pl. IV, fig. 54-55.)

$L = 130^{mm}$; $l = 4^{mm}2$; $e = 4^{mm}$. — Pétiole velu. Le collenchyme forme un anneau périphérique. Le tissu conjonctif, composé de cellules polygonales, renferme des canaux sécréteurs. On compte douze faisceaux libéro-ligneux : sept périphériques, et cinq situés à l'intérieur du pétiole.

A l'initiale, les faisceaux libéro-ligneux sont disposés sur une seule ligne, les faisceaux d, d', g, g', se portent dans l'intérieur

du pétiole à mesure qu'il s'épaissit ; l'un d'eux, *d'*, en se divisant, donne naissance au cinquième faisceau interne *m*. Les autres faisceaux de l'initiale correspondent aux faisceaux périphériques de la caractéristique.

Le *Polymnia uvedalia* présente les mêmes caractères que le *P. edulis*.

Silphium terebinthinaceum L.

La longueur du pétiole à partir de la gaine est de 540^{mm} environ ; $l = 6^{mm}5$; $e = 7^{mm}$. — Poils nuls. La caractéristique est une ellipse à grand axe vertical. L'hypoderme comprend six ou sept assises de collenchyme. Le tissu conjonctif renferme des canaux sécréteurs. Le système libéro-ligneux se compose de dix-sept faisceaux périphériques principaux, et de faisceaux internes, à bois supérieur, disposés sur cinq lignes horizontales. Le liber de ces différents faisceaux est emboîté dans un croissant de fibres scléreuses.

Tithonia tagetiflora Desf.

$L = 110^{mm}$; $l = 5^{mm}7$; $e = 4^{mm}2$. — Poils unisériés, de 125 μ. La caractéristique a une forme pentagonale arrondie. L'hypoderme se compose de quatre à six assises de collenchyme. Le tissu conjonctif renferme des canaux sécréteurs, disposés irrégulièrement. Le système libéro-ligneux comprend cinq faisceaux périphériques en dedans desquels on trouve deux ou trois gros faisceaux et quelques petits disposés sans régularité. Ces faisceaux possèdent des fibres épaisses.

Helianthus tuberosus L. (Pl. VI, fig. 61.)

$L = 50^{mm}$; $l = 4^{mm}5$; $e = 3^{mm}4$. — Poils unisériés de 300 μ, composés de quatre ou cinq cellules. La caractéristique est pentagonale, arrondie. L'hypoderme collenchymateux comprend six ou sept assises. Le tissu conjonctif renferme des canaux sécréteurs, le liber également. Le système libéro-ligneux se compose de trois gros faisceaux et de quatre petits.

L'initiale présente la même disposition ; seulement, à la place

des faisceaux *d* et *g*, on trouve deux ou trois fascicules qui se soudent plus loin.

Le pétiole de l'*Helianthus annuus* est constitué comme le précédent.

Dahlia coccinea Cav. (Pl. VI, fig. 62.)

L = 35^{mm}; l = $3^{mm}15$; e = $2^{mm}30$. — Poils nuls. L'hypoderme est formé de deux à quatre assises de cellules collenchymateuses. Le tissu conjonctif se compose de cellules polygonales, à méats nuls ou très petits: ce tissu est sclérifié en dedans des faisceaux périphériques. Ces faisceaux sont au nombre de neuf principaux pourvus de sclérenchyme. Les cinq inférieurs présentent de chaque côté un canal sécréteur.

Tous ces faisceaux se retrouvent à l'initiale, seulement les faisceaux D et *d* sont soudés ensemble, il en est de même de G et de *g*. Ils se séparent vers 2^{mm}.

Dans le *Dahlia scapigera*, le système libéro-ligneux offre sensiblement la même disposition. Il n'y a pas de sclérenchyme. Les plus gros faisceaux sont accompagnés, comme dans le *D. coccinea*, de deux canaux sécréteurs latéraux.

4° ANTHÉMIDÉES.

Achillea Ageratum L. (Pl. VI, fig. 56.)

L = 70^{mm}; l = $2^{mm}20$; e = $1^{mm}20$. — Poils unisériés de 2^{mm}, à parois épaisses. La caractéristique a une forme losangique; on trouve du collenchyme aux quatre angles. Il n'y a pas de canaux sécréteurs. Le système libéro-ligneux se compose de cinq faisceaux munis de sclérenchyme à leurs deux pôles.

A l'initiale, qui a la forme d'un croissant, on retrouve ces cinq faisceaux; il en existe en outre quatre petits; deux supérieurs et deux intercalaires situés de chaque côté du gros faisceau médian.

Pyrethrum Parthenium Sm. (Pl. VI, fig. 58, et pl. I, fig. 20.)

L = 57^{mm}; l = $1^{mm}50$; e = $1^{mm}40$. — Poils laineux de 500 μ. La caractéristique est pentagonale. On trouve un peu de collenchyme aux angles et au milieu du côté supérieur. Il n'y a pas de canaux

sécréteurs. Le système libéro-ligneux se compose de cinq faisceaux, accompagnés de fibres scléreuses.

Nous trouvons à l'initiale cinq faisceaux (pl. I, fig. 20). Les faisceaux G et D émettent chacun un fascicule qui se soude au faisceau médian M; les faisceaux G_1 et D_1 se fusionnent avec les faisceaux G, D, de sorte qu'il n'y a que trois faisceaux à la pseudo-initiale. Puis les faisceaux G, D émettent deux fascicules. Ainsi se trouvent constitués les cinq faisceaux de la caractéristique.

Tanacetum vulgare L.

$L = 16^{mm}$; $l = 2^{mm}$; $e = 2^{mm}$. — Poils rares. La caractéristique a la forme d'un U. On trouve quelques îlots de collenchyme aux parties saillantes. Il existe des canaux sécréteurs. Le système libéro-ligneux se compose de neuf faisceaux qui présentent des fibres scléreuses à leurs deux pôles.

A l'initiale, qui a la forme d'un croissant, nous retrouvons la même disposition; mais il existe de chaque côté, à la partie supérieure, deux petits faisceaux surnuméraires qui finissent par se fusionner avec leurs voisins. Il se produit dans la longueur du pétiole quelques anastomoses entre les faisceaux.

Artemisia maritima L.

$L = 25^{mm}$; $l = 1^{mm}35$; $e = 1^{mm}35$. — Poils laineux. On trouve un peu de collenchyme hypodermique en regard des faisceaux et au côté supérieur. Il n'y a pas de canaux sécréteurs. Le système libéro-ligneux se compose de trois gros faisceaux, tantôt distincts, tantôt soudés, munis de fibres scléreuses sur leurs deux faces; il existe, en outre, quatre fascicules situés dans les lobes supérieurs.

A l'initiale, on trouve cinq faisceaux; les trois inférieurs correspondent aux gros faisceaux de la caractéristique; les deux supérieurs, en se divisant, donnent naissance aux quatre fascicules.

L'*Artemisia procera* présente les mêmes caractères que l'*A. maritima*.

5° SENECIONIDÉES.

Senecio mikanioides Otto.

$L = 35^{mm}$; $l = 1^{mm}70$; $e = 1^{mm}50$. — La caractéristique est une ellipse échancrée à la partie supérieure. On trouve un peu de collenchyme en haut et en bas. Les faisceaux, au nombre de neuf, sont dépourvus de sclérenchyme. Chacun possède un canal sécréteur accolé à son liber.

A l'initiale, il n'existe que cinq faisceaux.

Cacalia hastata L.

$L = 20^{mm}$; $l = 1^{mm}60$; $e = 1^{mm}65$. — Poils nuls. Le collenchyme est représenté par deux assises hypodermiques à peu près continues. Le système libéro-ligneux se compose de sept faisceaux disposés symétriquement et pourvus de fibres épaisses. Il existe en général à leur pôle libérien un canal sécréteur.

On trouve également à l'initiale sept faisceaux libéro-ligneux.

Gymnopsis uniserialis Kock.

$L = 25^{mm}$; $l = 2^{mm}55$; $e = 1^{mm}45$. — Il existe une ou deux assises de collenchyme aux côtés inférieur et supérieur. Le système libéro-ligneux se compose de trois gros faisceaux pourvus de segments fibreux; il existe en outre quatre petits faisceaux : deux intercalaires et deux latéro-supérieurs. Les canaux sécréteurs font défaut.

A l'initiale on ne trouve que les trois gros faisceaux; le médian donne naissance aux deux faisceaux intercalaires, les deux autres aux faisceaux latéro-supérieurs.

6° CYNAROIDÉES.

Lappa minor D. C. (Pl. VI, fig. 59.)

$L = 160^{mm}$; $l = 7^{mm}7$; $e = 7^{mm}$. — Poils unisériés de 1^{mm} environ, formés d'une douzaine de cellules. Le côté supérieur de la caractéristique est concave, le reste de son contour est sinueux. On trouve du collenchyme dans les parties saillantes et au côté

supérieur. Il n'y a pas de canaux sécréteurs. Le centre du pétiole est occupé par une grande lacune. Le système libéro-ligneux se compose de onze faisceaux principaux, présentant à leurs deux pôles ou à leur pôle externe seulement, d'épais croissants fibreux; on trouve en outre quelques faisceaux intercalaires.

A l'initiale, qui a la forme d'un croissant, il existe neuf des faisceaux principaux de la caractéristique.

Alfredia cernua Cass.

L = 180^{mm}; *l* = 5^{mm}; *e* = 6^{mm}. — Poils unisériés. La caractéristique a un contour sinueux; chaque saillie correspond à un faisceau libéro-ligneux et renferme du collenchyme. Il y a neuf faisceaux principaux et quatre intercalaires. Ces faisceaux sont pourvus à leur pôle externe de nombreuses fibres épaisses; les plus gros possèdent en outre quelques fibres scléreuses à leur pôle interne. Il existe une lacune au centre du pétiole. Les canaux sécréteurs font défaut.

Centaurea candidissima. (Pl. VI, fig. 60.)

L = 90^{mm}; *l* = 3^{mm}7; *e* = 3^{mm}. — Poils laineux. La caractéristique a une forme pentagonale. On y trouve du collenchyme aux angles et au côté supérieur. Les faisceaux libéro-ligneux, au nombre de onze, sont munis de sclérenchyme à leur pôle externe; les plus gros en ont également à leur pôle interne. Il existe de petits canaux sécréteurs dans le voisinage des faisceaux.

On retrouve, à l'initiale, les faisceaux de la caractéristique et, de plus, quelques fascicules intercalaires.

Rhaponticum cynaroides Less.

L = 7^{mm}; *e* = 8^{mm}. — La caractéristique est une ogive sinueuse. On trouve du collenchyme dans les parties saillantes. Les faisceaux, au nombre de dix-sept environ, possèdent des fibres épaisses à leur pôle externe. Les plus gros faisceaux en ont à leurs deux pôles. Le centre du pétiole est occupé par une grande lacune. Les canaux sécréteurs font défaut.

CARACTÈRES COMMUNS. — Les Composées se divisent d'après MM. Bentham et Hooker en treize tribus : j'ai examiné des plantes se rapportant à six de ces tribus.

Les Composées étant, sauf de rares exceptions, des plantes herbacées, possèdent des faisceaux libéro-ligneux distincts. Dans les gros pétioles on trouve, outre des faisceaux périphériques, des faisceaux centraux *(Polymnia, Inula)*. Les faisceaux se ramifient peu, mais il se produit entre eux des anastomoses plus ou moins nombreuses. Les faisceaux sont d'ordinaire munis à leur pôle externe de fibres épaisses; dans certains cas on en trouve également à leur pôle interne. Dans quelques pétioles, ces fibres épaisses sont remplacées par des fibres scléreuses *(Pyrethrum Parthenium, Centaurea candidissima)*. Il existe un hypoderme collenchymateux, d'ordinaire continu, plus rarement discontinu *(Pyrethrum Parthenium)*. Les cristaux font défaut.

Le système sécréteur se présente sous forme de canaux *(Polymnia, Xanthium, Tithonia)*, de longues cellules isolées ou d'un réseau de cellules anastomosées.

DIPSACÉES.

Cephalaria tatarica. (Pl. VI, fig. 63.)

$L = 200^{mm}$; $l = 4^{mm}5$; $e = 4^{mm}2$. — Poils de 2^{mm}. La caractéristique est ogivale. On trouve du collenchyme à la partie inférieure et à la partie supérieure du pétiole. Le parenchyme cortical se compose de cellules rondes à parois minces. Il est dépourvu de cristaux et de canaux sécréteurs. Le système libéro-ligneux comprend neuf faisceaux munis de fibres épaisses.

On trouve également neuf faisceaux à l'initiale.

Par cet exemple, on voit que le pétiole des Dipsacées présente dans sa structure une grande ressemblance avec celui des Composées.

RÉSUMÉ.

Après avoir étudié en détail l'organisation du pétiole dans de nombreuses espèces, après avoir signalé les caractères généraux qu'elle présente dans les différentes familles, il n'est pas inutile de jeter sur mon travail un coup d'œil d'ensemble et de faire ressortir les traits principaux de la structure du pétiole dans la classe entière des Dicotylédones.

Forme. — La surface du pétiole, comme on sait, est symétrique par rapport à un plan vertical (nous supposons comme précédemment le pétiole horizontal); elle est toujours convexe inférieurement et généralement concave à sa partie supérieure. Du reste, la forme du pétiole n'est pas invariable dans toute sa longueur; elle varie suivant la tranche considérée. D'une façon générale, le pétiole est plus ou moins aplati à son extrémité caulinaire; dans certaines plantes, cette partie est fort mince relativement au reste du pétiole : elle prend alors le nom de gaine.

Il est donc nécessaire, quand on veut définir le contour d'un pétiole, d'indiquer en même temps la tranche considérée. Pour des raisons que justifie la lecture de mon travail, et que je ferai ressortir plus loin, j'ai choisi la coupe faite à l'extrémité terminale du pétiole et je l'ai désignée sous le nom de *caractéristique*.

La caractéristique nous a présenté des formes très diverses. Nous avons vu que ces formes peuvent varier beaucoup dans certaines familles (Composées, Légumineuses), présenter au contraire, dans d'autres, une certaine uniformité : dans les Rosacées, par exemple, la caractéristique est souvent demi-circulaire avec deux lobes latéro-supérieurs; dans les Malvacées, elle a fréquemment la forme d'un cercle plus ou moins aplati; il en est de même dans

les Cucurbitacées, tandis que dans les Fumariacées elle est triangulaire.

La forme de la caractéristique est assez constante dans chaque genre : elle est triangulaire-arrondie chez les *Ribes*, elliptique chez les *Ficus,* réniforme dans les *Ranunculus*. Dans ce dernier cas, nous avons vu la forme de la caractéristique persister en dépit des variations d'habitat, qui produisent de si grandes modifications dans la forme du limbe.

Dans une espèce donnée, la forme du pétiole varie peu, et c'est un des caractères dont M. Millardet a fait usage pour la distinction des différentes espèces de vignes (1).

Je rappelle que le *Liriodendron Tulipifera* est immédiatement reconnaissable à la forme de sa caractéristique, qui est aussi singulière que son feuillage.

Poils. — Les poils du pétiole ne fournissent pas de caractères importants pour la classification; car, d'une part, ils présentent en général peu de variété, et, d'autre part, leur existence n'est pas constante dans une même famille ni dans un même genre. Cependant les poils étoilés caractérisent assez bien les Malvacées et les Tiliacées, quoiqu'on les retrouve dans quelques espèces appartenant à des familles très différentes *(Solanum texanum, Verbascum nigrum, Phlomys chrysophylla, Scutellaria, Viburnum Lantana)*. A part les poils unicellulaires, unisériés, glanduleux, qui sont les plus fréquents, plurisériés, qui sont moins communs, les autres formes de poils sont rares. Je n'ai trouvé de poils en navette que dans trois espèces : *Benthamia fragifera*, *Humulus Lupulus* et *Indigofera Dosua*. L'*Olea europæa* possède des poils écailleux, et le *Platanus occidentalis* des poils ramifiés. L'*Artocarpus integrifolia* nous a montré des poils particuliers, de deux sortes : les uns recourbés en crochet à leur extrémité, les autres globuleux, surmontés d'une pointe et enchâssés dans l'épiderme (pl. VI, fig. 64). Enfin, je rappellerai les curieux poils de l'*Atriplex por-*

(1) Millardet, *Histoire des principales variétés et espèces de vignes d'origine américaine qui résistent au Phylloxera.* 1885.

tulacoides, qui en se soudant forment au-dessus de l'épiderme une couche protectrice (pl. VI, fig. 66).

Nous avons vu que la membrane de certains poils est légèrement scléreuse.

Membrane externe de l'épiderme. — La membrane externe est tantôt unie, tantôt plissée longitudinalement. Son épaisseur est généralement de 5 μ; parfois elle est plus mince : elle n'a que 3 μ, dans le *Clerodendron fœtidum* et le *Cyclanthera pedata;* d'autres fois elle est plus épaisse : dans les Renonculacées, par exemple, elle atteint souvent 10 μ; elle mesure 12 μ dans le *Nicotiana glauca;* 15 μ dans le *Phyllirea angustifolia;* 20 μ dans le *Nerium Oleander*.

La membrane externe est toujours plus ou moins cuticularisée; dans certains cas, cette cuticularisation est presque totale, par exemple dans l'*Illicium anisatum*.

On sait que les feuilles de beaucoup d'Urticacées et d'Acanthacées possèdent des cystolithes, développés aux dépens de leur membrane externe : je n'en ai pas observé dans les pétioles, et bien que je ne les aie pas spécialement recherchés, il est probable qu'ils font défaut, ou qu'ils sont très rares.

Cellules épidermiques (1). — Elles ont des formes très variables, et leurs variations sont indépendantes des familles et des genres. Sur une coupe transversale, elles sont tantôt rondes, tantôt quadrangulaires-arrondies, tantôt nettement quadrangulaires ou rectangulaires *(Ficus repens)*. Parfois, leurs parois s'épaississent beaucoup et leur cavité est très réduite. Les cellules épidermiques inférieures de l'*Anagyris fœtida* sont remarquables à cause de leur grand allongement dans le sens radial (pl. VI, fig. 65).

Liège. — Nous en avons rencontré dans le *Ficus repens,* le *Theobroma Cacao*, et le *Hoya carnosa*. Dans les deux premiers, il est en contact avec l'épiderme; il y en a une assise dans le *F. repens;* quatre ou cinq, dans le *Th. Cacao*. Dans le *Hoya*

(1) Je ne me suis pas occupé des stomates.

carnosa au contraire, le liège, qui comprend cinq ou six assises, est séparé de l'épiderme par quatre ou cinq assises de parenchyme.

Collenchyme. — Les éléments collenchymateux peuvent, comme l'on sait, affecter deux formes distinctes : tantôt leurs parois sont entièrement épaissies (Ombellifères, beaucoup de Rosacées); tantôt les épaississements sont localisés aux angles des cellules (Polygonées). Ces deux types de collenchyme sont reliés entre eux et au parenchyme par des formes intermédiaires et mal caractérisées.

Bien que rare dans le collenchyme, la chlorophylle n'y fait pas toujours défaut. On peut aussi y trouver quelquefois des cristaux d'oxalate de chaux *(Sterculia acerifolia)*.

Le collenchyme constitue une couche hypodermique plus ou moins épaisse, continue dans les Rosacées, Malvacées, Solanées, Personées, Cucurbitacées. Il forme des faisceaux distincts correspondant aux faisceaux libéro-ligneux périphériques dans les *Rumex*, dans les Ombellifères.

Le collenchyme n'est pas toujours en contact immédiat avec l'épiderme; dans certains cas il en est séparé par une ou deux assises de parenchyme chlorophyllien (ex. *Lycopersicum esculentum*, *Solanum tuberosum*, *Nicotiana glauca*).

Tissu conjonctif. — Il est formé de cellules rondes ou polygonales, à parois minces ou épaisses; tantôt dépourvu de méats, tantôt méatique et même lacuneux. Sous ce rapport on connaît l'influence de l'habitat : les plantes aquatiques présentent de grands méats, des canaux aérifères, ou des lacunes. J'ai montré par exemple dans le pétiole des *Polygonum* que le tissu conjonctif est d'autant plus lâche que l'espèce considérée recherche davantage l'humidité.

Quand le système libéro-ligneux forme un anneau, le tissu conjonctif se différencie en parenchyme cortical et moelle. Dans le parenchyme cortical lui-même, on distingue le parenchyme chlorophyllien et le parenchyme incolore. Le tissu conjonctif a des parois d'autant plus minces, ses cellules sont d'autant plus grandes et méatiques, qu'elles sont situées plus profondément

dans le pétiole. Les cellules médullaires se comportent naturellement comme les cellules profondes du tissu conjonctif. Dans quelques cas exceptionnels, elles sont plus petites que les cellules corticales *(Mimosa pudica)*.

Du reste, le tissu conjonctif, à cause de sa grande variabilité, ne peut pas fournir de caractères de famille ou de genre.

Cristaux. — Les cristaux, au contraire, acquièrent par leur fixité une grande importance taxinomique. On les rencontre dans le parenchyme cortical, dans le liber et dans la moelle. Ils peuvent dans la même espèce exister dans ces trois tissus à la fois *(Ficus repens)*. Mais, d'ordinaire, ils n'existent que dans un ou deux et l'on peut tirer de ces différences de situation, d'excellents caractères spécifiques.

Les cristaux se rencontrent dans le pétiole des Dicotylédones sous quatre formes différentes : 1° raphides; 2° granulations cristallines; 3° cristaux isolés; 4° mâcles.

Les raphides, fréquentes chez les Monocotylédones, sont rares chez les Dicotylédones. Sur cinq cents plantes, je n'en ai observé que dans huit appartenant à des familles très différentes; ce sont : le *Phytolacca decandra*, l'*Impatiens glanduligera*, l'*Hydrangea Hortensia*, le *Jussiæa grandiflora*, le *Thunbergia alata*, le *Fuchsia fulgens* et deux autres espèces de *Fuchsia*. D'après ce dernier exemple, il semble que les raphides soient communes à toutes les espèces d'un genre. M. Fugairon [1] en a trouvé également dans toutes les espèces du genre *Laportea* qu'il a étudiées. Il est plus rare de les rencontrer dans plusieurs genres d'une famille (Dilléniacées).

Les cristaux pulvérulents sont toujours très nombreux dans la même cellule et la rendent opaque. Ces cristaux caractérisent surtout les Solanées, on les retrouve dans toutes les plantes de cette famille à l'exclusion des autres cristaux, sauf quelques exceptions (ex. *Hyoscyamus niger*). On trouve encore des cristaux pulvérulents dans quelques Chénopodiacées et Amarantacées, dans l'*Aucuba japonica*, et dans les *Sambucus nigra* et *Ebulus*.

---

[1] S. Fugairon, *Recherches sur les Urticinées*, 1879.

Les cristaux isolés (prismes ou octaèdres) ne se rencontrent d'ordinaire qu'associés aux mâcles, excepté dans les Légumineuses où ils existent seuls. Ils fournissent donc un bon caractère pour distinguer les plantes de cette famille. Malheureusement il n'est pas d'une généralité absolue, car un certain nombre de Légumineuses sont dépourvues de cristaux.

Les mâcles se rencontrent dans les Urticacées, les Polygonées, les Chénopodiacées *(partim)*, les Amarantacées *(partim)*, les Cupulifères, les Juglandées, le Salicinées, les Platanées, les Rosacées, les Géraniacées, les Oxalidées, les Malvacées, les Araliacées, les Cornées, les Saxifragacées, les Asclépiadées, les Apocynées *(partim)*, les Caprifoliacées.

Dans son mémoire déjà cité, M. Vesque dit que « les cristaux sont fort rares dans les Renonculacées, comme du reste dans toutes les familles composées de plantes herbacées » [1]. En réalité, l'existence des cristaux est indépendante de la lignosité : s'ils font défaut dans certaines familles de plantes herbacées, comme les Composées, les Cucurbitacées, on les trouve dans des familles mixtes, comme les Urticacées, les Rosacées, les Légumineuses, et dans des familles renfermant presque exclusivement des herbes comme les Polygonées, Chénopodiacées, Amarantacées. En revanche, certains arbres en sont dépourvus : le *Ficus Carica* est dans ce cas, bien quel on trouve des cristaux dans les autres espèces de *Ficus* et en général dans toutes les Urticacées. Si le *Pæonia Moutan* renferme des cristaux, ce n'est nullement parce qu'il est arborescent, puisqu'on trouve des mâcles dans les Pivoines herbacées. Je puis encore citer l'*Eryngium campestre* qui renferme des mâcles, bien que les Ombellifères n'en contiennent pas.

Tissus sécréteurs. — On retrouve dans le pétiole les différents tissus sécréteurs connus : cellules, poches, canaux, laticifères articulés et non articulés, etc... Je me borne à le rappeler,

---

[1] Vesque, *De l'Anatomie des tissus*, etc... (*Nouvelles Archives du Muséum*, 2e série, t. IV, p. 28).

n'ayant pas fait une étude particulière de ces organes. J'ai signalé leur existence dans différentes plantes, et nous avons vu, notamment, que les canaux sécréteurs et les laticifères fournissent de bons caractères de famille.

Fibres épaisses. — Il existe dans certains pétioles, au pôle externe des faisceaux libéro-ligneux, un croissant de tissus formé de fibres à parois épaisses, non lignifiées, très réfringentes, brillantes comme du collenchyme. On peut aussi rencontrer ces fibres au pôle interne des faisceaux. Ce sont des éléments mécaniques, qui d'ordinaire ne coexistent pas avec les fibres scléreuses sur la même coupe transversale. Mais ces deux espèces de fibres peuvent se substituer l'une à l'autre dans la longueur du pétiole. Ainsi, dans le *Cercis Siliquastrum,* les faisceaux libéro-ligneux sont logés dans une masse de fibres dont la membrane est sclérifiée au milieu du pétiole, épaissie simplement à son extrémité foliaire.

On trouve des fibres épaisses principalement chez les Malvacées, les Crucifères, les Ombellifères, les Composées.

Sclérenchyme. — Il se présente sous trois formes différentes : à l'état de parenchyme, de fibres et de cellules pierreuses.

Les cellules pierreuses sont plus ou moins allongées; leur paroi très épaisse est traversée par de nombreux canalicules et présente plusieurs couches concentriques. Je n'en ai rencontré que dans deux plantes : le *Hoya carnosa,* où elles sont isolées; le *Magnolia grandiflora* où elles forment des agglomérations dans le parenchyme cortical et dans la moelle.

On sait que dans les feuilles des Monocotylédones, l'hypoderme est souvent formé par des fibres scléreuses; il n'en est pas ainsi dans les Dicotylédones. Cependant il existe au milieu de l'hypoderme collenchymateux du *Theobroma Cacao,* quelques fibres épaisses qui se colorent en bleu intense par le violet d'aniline : ce qui atteste bien leur sclérification. Mais c'est le seul cas que j'aie observé.

Dans les Dicotylédones, en effet, les fibres scléreuses sont localisées au voisinage des faisceaux libéro-ligneux. Tantôt elles

sont disposées en croissant à leur pôle externe (Rosacées); tantôt à leurs deux pôles *(Rumex Hydrolapathum)*. Dans le cas où les faisceaux libéro-ligneux sont distincts, les fibres accolées à ces faisceaux peuvent être réunies par du parenchyme scléreux *(Actæa racemosa)* ou par des fibres scléreuses *(Thalictrum majus)*. Quand les faisceaux forment un anneau, il en est de même ordinairement des fibres scléreuses disposées à sa périphérie.

Il est à remarquer que dans le même pétiole le sclérenchyme n'existe pas d'ordinaire dans toute son étendue. La plupart du temps, il fait défaut dans sa région antérieure (1) (*Dalbergia latisiliqua, Apios tuberosa*, etc...) : c'est le cas le plus fréquent. Le sclérenchyme peut, au contraire, exister dans la portion initiale du pétiole et manquer à son extrémité foliaire *(Aconitum napellus, Barbarea vulgaris, Heuchera americana)*. Dans l'*Illicium anisatum*, dans le *Populus alba*, on n'en trouve que dans la portion médiane de cet organe.

Le sclérenchyme existe dans un certain nombre de Renonculacées, dans la plupart des Rosacées, dans toutes les Légumineuses (sauf *Trifolium* et *Medicago*), dans les Cupulifères, les Juglandées, les Platanées. En dehors de ces familles on ne le trouve qu'exceptionnellement. (Je ne parle bien entendu que des familles étudiées dans ce travail.) Ainsi nous en avons rencontré dans quelques Crucifères et Composées. On se rappelle que dans les *Pelargonium* il forme un mince péricycle fibreux.

Il faut noter que si le sclérenchyme existe dans le pétiole de certains arbres (Cupulifères), il fait défaut chez d'autres (Salicinées, Urticacées, *Paulownia*). D'autre part, on le rencontre chez des plantes herbacées, comme certaines Rosacées ou Légumineuses. On voit donc que le sclérenchyme n'existe pas forcément dans les plantes ligneuses, comme on aurait pu le croire *a priori*. Son existence n'est pas en relation avec la lignosité

(1) L'absence de sclérenchyme à la base du pétiole facilite évidemment les mouvements d'oscillation de cet organe.

de la plante, elle ne dépend que des affinités naturelles de cette plante. Il en résulte que la présence du sclérenchyme dans le pétiole constitue un bon caractère de famille.

Système libéro-ligneux. — Quand le liber n'existe que d'un côté du bois, on dit que le faisceau est collatéral : c'est la structure la plus fréquente. Dans ce cas les faisceaux périphériques du pétiole tournent leur liber vers l'extérieur; les faisceaux centraux ont une orientation variable. Lorsque le liber recouvre les deux faces du bois, on dit que le faisceau est bicollatéral. Cette disposition est plus rare, mais on la retrouve généralement dans toutes les plantes d'une même famille : les Solanées, les Convolvulacées, les Asclépiadées, les Apocynées, les Myrtacées, les Cucurbitacées, les Œnothérées possèdent des faisceaux bicollatéraux. D'ordinaire, quand deux faisceaux collatéraux s'unissent, le bois et le liber de l'un se soudent aux tissus semblables de l'autre, et le faisceau résultant demeure collatéral. Cependant il peut arriver que les deux faisceaux s'accolent par leur bois (faisceaux centraux de *Cochlearia armoracia*); ou par leur liber (faisceau central du *Pelargonium hederæfolium*); mais ces cas sont rares. Les faisceaux peuvent avoir la forme d'un cercle, dont le liber occupe le centre, et le bois la périphérie; dans d'autres cas, on observe une disposition inverse; de pareils faisceaux sont appelés concentriques; ils sont également assez rares. Enfin, il existe une autre disposition, dans laquelle chaque faisceau est formé de petits fascicules, distincts les uns des autres et disposés suivant les rayons d'un cercle : je leur ai donné pour cette raison le nom de *faisceaux rayonnés*. On ne les trouve guère que dans les Crucifères et à la base du pétiole des *Platanus*.

D'ordinaire, quand le bois est disposé en arc continu, il en est de même du liber; mais celui-ci peut aussi former de petits îlots distincts; comme on le voit dans la plupart des Solanées. L'inverse peut aussi se produire : ainsi dans l'*Humulus Lupulus,* les faisceaux ligneux distincts son reliés par un anneau continu du liber.

Je rappelle que le liber des Renonculacées présente sur une coupe transversale une forme circulaire ou elliptique; tandis que

dans la majorité des plantes cette même section a la forme d'un croissant à concavité tournée vers le bois.

Je ferai une remarque au sujet des feuilles persistantes. Dans certains cas, le bois y est plus développé que dans les feuilles caduques de la même famille ou du même genre. Cela est évident, si l'on compare les *Quercus Ilex* et *Suber* au *Q. pedunculata;* l'*Olea europæa,* les *Phyllirea angustifolia* et *latifolia* aux autres Oléinées. J'ai déjà mentionné que l'on trouve dans ces trois dernières plantes des fibres scléreuses, tandis que les autres Oléinées en sont dépourvues. Au contraire, dans d'autres feuilles persistantes, la partie ligneuse n'a guère plus d'importance que dans les feuilles caduques de la même famille *(Aucuba japonica, Hoya carnosa).*

Les faisceaux libéro-ligneux sont accompagnés d'une assise protectrice particulière, l'endoderme. Je ne l'ai pas étudié, car il est peu probable qu'il puisse fournir des caractères de famille ou de genre.

Parcours des faisceaux. — Il peut se ramener à quelques types, qu'on peut ranger en deux groupes : les types *simples* et les types *complexes.*

TYPES SIMPLES.

A. Les faisceaux présentent la même disposition (soudés ou distincts) à l'initiale et à la caractéristique.

I. Faisceaux distincts à la caractéristique et à l'initiale.

Les faisceaux sont parallèles et disposés symétriquement de chaque côté du plan médian. En général, il existe un faisceau médian inférieur. On retrouve la même disposition dans toute la longueur du pétiole, à part quelques ramifications et anastomoses, qui varient suivant les espèces et n'ont par suite aucun caractère général.

α. Le faisceau médian inférieur n'est guère plus grand que les autres (Polygonées, Géraniacées, Crucifères, Cucurbitacées, Ombellifères, Composées).

β. Le faisceau médian inférieur est prédominant, quelquefois unique (Solanées, Personées, Asclépiadées. Rosacées).

γ. Le faisceau médian inférieur manque dans un grand nombre de Labiées (*Phlomys, Salvia*).

II. **Faisceaux soudés en anneau à la caractéristique et à l'initiale** *(Bignonia, Acanthus, Wigandia)*.

B. Les faisceaux présentent des dispositions inverses à l'initiale et à la caractéristique.

III. **Faisceaux soudés en anneau à l'initiale, devenant par leur divergence distincts à la caractéristique** *(Psoralea, Apios, Phaseolus, Erythrina)*.

IV. **Faisceaux distincts à l'initiale, formant par leur convergence un anneau à la caractéristique** *(Heuchera, Ribes)*.

TYPES COMPLEXES.

V. **Rosacées.** — Le système libéro-ligneux débute par trois faisceaux, qui plus loin se soudent entre eux. Chaque faisceau latéral émet soit avant, soit après sa réunion au faisceau médian, un faisceau latéral qui, à son tour, peut donner naissance à un autre faisceau. Cette disposition est constante chez toutes les Rosacées et ne se retrouve pas ailleurs (pl. I, fig. 7 et 19).

VI. **Géraniacées, Malvacées.** — A l'origine du pétiole, on trouve cinq faisceaux (abstraction faite de petits faisceaux intercalaires). Les deux supérieurs se soudent, et il ne reste plus que quatre faisceaux, qui tantôt restent isolés (Géraniacées) (pl. I, fig. 10), tantôt s'unissent en anneau (Malvacées); on retrouve le même type dans quelques Tiliacées, et dans certaines familles voisines des Géraniacées, comme les Tropæolées, les Oxalidées.

VII. **Cornées.** — Dans un grand nombre de ces plantes, chez les *Viburnum* et beaucoup de Légumineuses arborescentes ou frutescentes, le système libéro-ligneux débute par trois faisceaux. De chaque faisceau latéral naît un fascicule; il en part deux du faisceau médian. Ces quatre fascicules, en se soudant deux à deux, donnent naissance à deux faisceaux qui se portent en haut. Les trois faisceaux primitifs se soudent et forment à la caractéristique un arc de cercle, dont les faisceaux supérieurs occupent la corde (pl. I, fig. 2).

VIII. **Cupulifères.** — Le système libéro-ligneux peut se composer, à l'initiale, de faisceaux distincts qui, plus loin, se soudent en anneau incomplet, ou bien débuter immédiatement par un anneau incomplet ou un arc de cercle. Tantôt il reste à cet état, et offre à la caractéristique la forme d'un U *(Betula)* (pl. II, fig. 57). Tantôt les extrémités de l'arc se recourbent en dedans, se soudent entre elles et se séparent de la portion principale, de manière que la caractéristique présente un anneau avec faisceau intra-médullaire, dont le bois est supérieur *(Quercus)* (pl. II, fig. 42-44). Tantôt les extrémités de l'arc se recourbent en

dehors, et par un processus analogue au précédent, il se produit un anneau surmonté d'un faisceau, dont le bois est supérieur *(Alnus)* (pl. II, fig. 45-49).

IX. **Salicinées.** — Chez les *Salix,* on trouve à l'initiale trois faisceaux, qui plus haut se recourbent pour former trois cercles. Ceux-ci se rapprochent et se fusionnent en un anneau (pl. II, fig. 76-79).

Dans les *Populus,* le système libéro-ligneux débute de la même manière. Mais les trois cercles, avant de se souder, se segmentent chacun en deux : il existe alors six cercles, trois inférieurs et trois supérieurs. Les trois inférieurs se soudent en anneau comme chez les *Salix;* les trois supérieurs, en se fusionnant et en se segmentant, comme je l'ai indiqué en détail, à propos du *Populus alba,* se transforment en deux anneaux placés l'un au-dessus de l'autre, de façon que la caractéristique présente trois anneaux superposés (pl. III, fig. 1-7).

X. **Juglandées.** — A la base du pétiole, on trouve un anneau triangulaire. Du côté supérieur de ce triangle partent des faisceaux, qui forment au-dessus de lui, soit une rangée rectiligne (*Juglans,* pl. II, fig. 68), soit des anneaux circulaires ou elliptiques (*Carya, Pterocarya,* pl. II, fig. 69-73).

XI. **Platanées.** — Chez les *Platanus,* le sytème libéro-ligneux débute par un certain nombre de faisceaux rayonnés, placés à la périphérie du pétiole : nous en avons trouvé huit chez le *Platanus occidentalis;* ces faisceaux, en suivant une marche curieuse et compliquée, que j'ai complètement décrite, finissent par former un anneau inférieur bien net, surmonté de deux autres qui ne sont, pour ainsi dire, qu'ébauchés (pl. III, fig. 13-21).

XII. **Bauhiniées.** — Le système libéro-ligneux du *Cercis siliquastrum* (pl. IV, fig. 31-36) se compose, à l'origine, de trois faisceaux qui se soudent pour former un anneau. Cet anneau, en se segmentant, produit un cercle plus petit, supérieur. Puis l'anneau se fragmente en trois ellipses, une médiane et deux latérales; le cercle supérieur se partage en deux cercles, qui finissent par se fusionner avec les ellipses latérales; tandis que l'ellipse médiane s'ouvre à sa partie supérieure. La caractéristique présente donc deux faisceaux annulaires latéraux et un faisceau médian en forme d'U.

Bien que différent en apparence, le trajet des faisceaux du *Bauhinia racemosa* peut se rattacher à celui du *Cercis siliquastrum.* Dissemblables au début, les systèmes libéro-ligneux de ces deux pétioles présentent, à un certain niveau, des dispositions presque identiques. Comparons, en effet, la coupe du *Cercis siliquastrum* représentée fig. 34 (pl. IV), et celle du *Bauhinia*

racemosa (pl. IV, fig. 77). Nous voyons dans les deux un grand anneau réniforme, inférieur, surmonté d'un anneau plus petit [1]. Dans les deux cas, ce dernier anneau disparaît; on n'en trouve pas de traces à la caractéristique. Quant au grand anneau, il se montre divisé en trois autres anneaux à la caractéristique du *Cercis siliquastrum* (pl. IV, fig. 36); tandis que chez le *Bauhinia racemosa*, il ne forme que deux anneaux partagés eux-mêmes en deux moitiés (pl. IV, fig. 79).

Il est intéressant de remarquer qu'en dépit des ramifications et des anastomoses qui ne sont pas exactement symétriques, les faisceaux se montrent disposés symétriquement par rapport au plan médian du pétiole : à l'initiale, à la pseudo-initiale (coupe terminale de la gaine) et à la caractéristique.

Remarquons encore que la disposition des faisceaux n'est pas influencée par la persistance des feuilles. Ainsi le trajet typique des Rosacées se retrouve aussi bien dans les feuilles caduques des *Rosa, Spiræa...*, que dans les feuilles persistantes du *Prunus Lauro-cerasus*, du *Raphiolepis ovata* ou du *Photinia serrulata*.

Notons aussi que le pétiole des feuilles composées ne présente pas un type particulier de système libéro-ligneux et ne se distingue pas, à ce point de vue, de celui d'une feuille simple, comme le montre le tableau suivant :

CARACTÉRISTIQUE.	FEUILLES SIMPLES.	FEUILLES COMPOSÉES.
Faisceaux libéro-ligneux distincts.	Crucifères, Cucurbitacées.	Légumineuses herbacées.
Id. soudés en anneau.	Cupulifères.	Légumineuses arborescentes

On trouve également des faisceaux intra-médullaires dans des feuilles simples *(Ficus Carica)* et dans des feuilles composées *(Æsculus rubicunda)*.

On a vu que le tissu conjonctif éprouve de grandes modifications chez les plantes aquatiques, il n'en est pas de même du trajet des faisceaux. Ainsi les *Ranunculus* terrestres et aquatiques

(1) Ces deux coupes reproduisent, quant à la disposition du système libéro-ligneux, la caractéristique d'une autre Légumineuse : le *Toluifera Balsamum*.

nous présentent la même disposition du système libéro-ligneux. Chez le *Trapa natans,* dont le tissu conjonctif est si modifié, le système libéro-ligneux est disposé comme dans les autres Œnothérées.

Mais il est d'autres causes qui influent sur la disposition des faisceaux libéro-ligneux, je vais maintenant les faire connaître.

Si nous examinons des Crucifères, des Cucurbitacées, des Ombellifères, des Composées, nous voyons que dans toutes ces familles la caractéristique possède des faisceaux distincts; nous trouvons au contraire des anneaux chez les Cupulifères, les Salicinées, les Juglandées.

D'après ces exemples, il semble que dans chaque famille on trouve exclusivement, à la caractéristique, soit des faisceaux soudés, soit des faisceaux distincts.

Il n'en est rien. Ainsi chez les Urticacées, l'Ortie (pl. II, fig. 1) et la Pariétaire (pl. II, fig. 2) nous montrent, à la caractéristique, des faisceaux distincts et périphériques, tandis que le Mûrier (pl. II, fig. 10), le Figuier (pl. II, fig. 6), l'Ormeau (pl. II, fig. 17) possèdent un anneau libéro-ligneux central. Parmi les Papilionacées, le Cytise (pl. IV, fig. 30), le Robinier (pl. IV, fig. 2) renferme des anneaux; le Trèfle (pl. III, fig. 69), la Luzerne, le Sainfoin, des faisceaux séparés. Ces deux derniers exemples, empruntés à des familles bien naturelles, nous montrent que la coalescence ou la séparation des faisceaux n'a, au point de vue taxinomique, qu'une valeur relative.

Cependant la coalescence des faisceaux ne se produit pas d'une façon quelconque. Si, avec les espèces que je viens de citer, nous formons deux groupes : l'un comprenant les plantes dont les faisceaux libéro-ligneux sont distincts à la caractéristique, l'autre les plantes dont la caractéristique présente des faisceaux soudés, nous verrons que le premier ne renferme que des plantes herbacées; le second, que des plantes ligneuses. Les plantes herbacées, mais de taille élevée, offrent souvent des caractères mixtes. Ainsi, par exemple, l'*Humulus Lupulus* (pl. II, fig. 8) et le *Lophospermum scandens* (pl. VI, fig. 3) ont un certain nombre

de faisceaux disposés en cercle, écartés les uns des autres, mais réunis par un anneau de liber.

Dans bien des cas, les plantes ligneuses grimpantes présentent également des dispositions intermédiaires. Ainsi dans le *Ficus repens*, les faisceaux libéro-ligneux sont disposés en cercle, mais leur coalescence est moins grande (à la caractéristique), que dans les *F. elastica* et *Carica*.

Nous pouvons donc formuler cette règle (1), qui s'applique à un grand nombre de familles : ***Dans les plantes herbacées, la caractéristique présente des faisceaux distincts; dans les plantes frutescentes ou arborescentes, des faisceaux soudés en anneau (complet ou non). Les plantes grimpantes ou même les herbes de taille élevée offrent des dispositions intermédiaires.***

Certains faits particuliers démontrent encore la justesse de cette règle. Ainsi tous les *Rumex* ont des faisceaux distincts; cependant on aurait pu croire que dans les espèces à grandes feuilles (*R. obtusifolius*, *R. Hydrolapathum*), où par conséquent ce pétiole doit être plus rigide, les faisceaux pétiolaires se soudaient en cylindre creux; il n'en est rien. L'accroissement de résistance du système libéro-ligneux est dû à des faisceaux surnuméraires, placés en dedans des faisceaux périphériques. Nous retrouverions des dispositions analogues dans les Ombellifères (*Thapsia garganica*, pl. V, fig. 32), dans les Crucifères (*Crambe cordifolia*, pl. V, fig. 8), dans les Composées (*Silphium terebinthinaceum*).

En général, dans les Renonculacées, les faisceaux pétiolaires sont distincts et disposés en arc de cercle; parfois ils sont disposés en cercle complet (*Thalictrum, Actæa*), mais alors ils sont nombreux et grêles, et l'on ne peut dire qu'ils forment un anneau. Chez différentes espèces de *Pæonia*, on trouve sept ou neuf faisceaux disposés en arc de cercle, mais chez le *Pæonia Moutan* (pl. III, fig. 45) ces faisceaux forment un anneau à la caractéristique

(1) Cette règle ne s'applique plus quand l'épaisseur du pétiole est inférieure à 1mm (ex. : *Sarothamnus scoparius, Medicago arborea, Hydrocotyle vulgaris*).

et les trois inférieurs, notamment, prennent un développement considérable. Or, le *P. Moutan* est une plante ligneuse, à l'inverse des autres Renonculacées qui sont des herbes.

Le *Cordia sebestana* (pl. VI, fig. 49), parmi les Borraginées, donne lieu à la même observation.

Ces deux cas, en apparence exceptionnels, viennent donc confirmer la proposition énoncée plus haut.

Néanmoins cette proposition, bien qu'exacte dans un grand nombre de cas, n'est pas encore d'une généralité absolue. Dans certaines familles en effet, la différence entre les plantes herbacées et les plantes ligneuses n'est pas aussi nette que chez les Urticacées et les Légumineuses. Cela peut arriver de deux façons : ou bien les plantes ligneuses ont à la caractéristique des faisceaux distincts, grêles, disposés en fer à cheval *(Sambucus nigra);* ou bien les plantes herbacées ont à la caractéristique des faisceaux soudés en anneau *(Malva)*. Mais dans les familles où il en est ainsi, les plantes ligneuses se distinguent encore des herbes, par la plus grande importance du système libéro-ligneux.

Tous ces faits peuvent se résumer de la façon suivante : *en général la caractéristique présente des faisceaux distincts dans les herbes, fusionnés en arc ou en anneau dans les plantes ligneuses. Chez les familles qui font exception à cette règle, les plantes ligneuses se distinguent encore des herbes par le plus grand développement ou la coalescence plus complète du système libéro-ligneux de la caractéristique.*

D'après M. C. de Candolle, les différentes dispositions des faisceaux pétiolaires peuvent se ramener à deux systèmes différents : le système ouvert et le système fermé. « Dans le premier cas, la coupe transversale du pétiole et des nervures ne présente que des faisceaux disposés en un arc, dont la convexité est tournée vers la périphérie de l'organe. Les deux extrémités de cet arc laissent entre elles un espace dépourvu de ligneux, au-dessous de la partie médiane supérieure. Dans le second cas, la coupe transversale de la partie dans laquelle il existe un système fermé présente des faisceaux symétriquement disposés tout autour de la moelle. Lors-

que les faisceaux d'un système fermé sont nombreux, ils arrivent à former un véritable anneau ligneux semblable à celui d'une tige ligneuse (1). »

Du reste, cette distinction est absolue, et un anneau libéro-ligneux qui présente une petite interruption à la partie supérieure doit être considéré comme appartenant à un système ouvert.

Remarquons tout de suite que M. C. de Candolle néglige de dire à quel endroit du pétiole il fait la coupe transversale dont il a été question plus haut. Or, ceci est très important, car nous avons vu, en étudiant le trajet des faisceaux libéro-ligneux, que dans un même pétiole, suivant la tranche considérée, on trouve un système fermé ou un système ouvert. Par exemple, si l'on fait une coupe au milieu du pétiole du *Geranium Robertianum*, on a un système ouvert; ce sera un système fermé si la coupe est faite à l'extrémité foliaire du pétiole.

M. C. de Candolle n'ignore pas ce fait, car il dit : « Peu de feuilles possèdent dans toute leur étendue un système principal fermé (2). » Mais, sans s'occuper de dissiper cette incertitude, il déclare « qu'en général on observe que l'une ou l'autre de ces dispositions fondamentales est commune à toutes les espèces d'un genre ou d'une famille lorsque celle-ci représente un type nettement caractérisé sous les autres rapports » (3).

Nous savons cependant que beaucoup de familles, et des plus naturelles, renferment à la fois des plantes à système ouvert et d'autres à système fermé; les Urticacées, les Cupulifères, les Renonculacées, les Oléinées, les Scrophularinées, les Hydrophyllées, les Cornées, les Caprifoliacées, sont dans ce cas.

Si M. C. de Candolle a pensé que ces deux dispositions étaient incompatibles dans une même famille, c'est parce que ses recherches ont porté principalement sur des familles exclusivement ligneuses, chez lesquelles existe seulement le système fermé. En effet, sur vingt familles étudiées par cet auteur, six seulement

(1) *Anatomie comparée des feuilles*, p. 429.
(2) *Loc. cit.*, p. 430.
(3) *Loc. cit.*, p. 448.

renferment des plantes herbacées : les Légumineuses, les Euphorbiacées, les Polygonées, les Hydrophyllées, les Araliacées.

Mais dans ces dernières familles ses investigations ont été très limitées. Ainsi, dans les Légumineuses, il ne s'est occupé que des genres *Inga, Swartzia* et *Entada,* qui sont des arbres ou des arbrisseaux et possèdent des systèmes fermés. Il a également retrouvé des systèmes fermés dans trois genres d'Euphorbiacées *(Mallotus, Macaranga, Ricinus);* dans un genre d'Hydrophyllées *(Wigandia)* [nous avons vu que l'*Hydrophyllum canadense* a un système ouvert], dans les Araliacées, les Géraniacées et les Polygonées.

Après cette discussion, il paraîtra, sans doute, préférable de distinguer, comme je l'ai fait, dans le système libéro-ligneux du pétiole, deux types : l'un formé à la caractéristique de faisceaux grêles, distincts, espacés; l'autre, de faisceaux fusionnés en arc ou en anneau. Cette classification offre sur celle de M. C. de Candolle l'avantage d'être plus exacte au point de vue de l'anatomie comparée, puisque le premier type se rencontre exclusivement chez les plantes herbacées (nous n'avons trouvé qu'une exception); le second, chez toutes les plantes ligneuses et quelques plantes herbacées appartenant à des familles spéciales où l'on ne trouve que des faisceaux arciformes ou annulaires. La classification que je propose est aussi plus naturelle au point de vue taxinomique, puisque dans les familles végétales constituées exclusivement, soit par des plantes herbacées, soit par des plantes ligneuses, on ne rencontre que l'un ou l'autre des deux types.

Caractéristique. — La plupart des tissus qui composent le pétiole conservent sensiblement la même disposition dans toute la longueur de cet organe, et pour la connaître on peut généralement faire une coupe à un endroit quelconque du pétiole. Il n'en est pas de même du système libéro-ligneux. Dans la plupart des plantes herbacées, il ne varie guère : les faisceaux restent distincts dans toute l'étendue du pétiole, et l'on ne constate que d'insignifiantes variations dans leur nombre. Mais dans quelques plantes herbacées et dans la majorité des plantes ligneuses, les faisceaux,

généralement distincts à la base, se réunissent plus loin pour former un ou plusieurs anneaux.

Ces modifications dans la disposition des faisceaux se poursuivent souvent jusqu'à l'extrémité terminale du pétiole. C'est donc la coupe terminale qui présentera dans chaque plante la disposition la plus compliquée et la plus régulière, et qui offrira d'une plante à l'autre le plus de différences : c'est par conséquent la coupe la plus instructive. Je lui ai donné le nom de *caractéristique,* car dans bien des cas elle suffit pour faire reconnaître la famille d'une plante et quelquefois son genre. Les genres *Populus, Platanus, Liquidambar, Quercus, Corylus, Juglans, Pelargonium, Cercis, Bauhinia,* etc., sont immédiatement reconnaissables à leur caractéristique.

TABLEAU

Résumant les caractères différentiels du pétiole dans les principales familles de Dicotylédones (1).

A. La caractéristique renferme des canaux sécréteurs.

a. Il existe d'ordinaire un canal sécréteur en arrière de chaque faisceau périphérique.

1. Pas de cristaux; faisceaux isolés, rapprochés de l'épiderme; collenchyme hypodermique discontinu...... **Ombellifères.**
2. Ordinairement des mâcles; faisceaux distincts ou soudés, disposés en cercle; collenchyme continu....... **Araliacées.**

b. Canaux sécréteurs disposés irrégulièrement; collenchyme hypodermique continu.

1. Mâcles, faisceaux soudés en anneau à la caractéristique. **Malvacées** (2), **Tiliacées** (2), **Sterculiacées.**
2. Pas de mâcles; faisceaux distincts à la caractéristique. **Composées** (2,3).

---

(1) Dans la rédaction de ce tableau, je n'ai pas tenu compte des exceptions.

(2) *Partim.*

(3) Dans un certain nombre de Composées, on trouve en arrière de chaque

B. La caractéristique ne renferme pas de canaux sécréteurs.

a. Faisceaux bicollatéraux.

1. Faisceau médian très développé.

α. Fibres laticifères rameuses.... **Asclépiadées**, **Apocynées**.
β. Cellules laticifères disposées en files.......... **Convolvulacées**.
γ. Pas de laticifères; granulations cristallines ... **Solanées**.
δ. Pas de laticifères; mâcles.................... **Myrtacées**.

2. Faisceau médian pas très développé; cristaux nuls. **Cucurbitacées**

b. Pas de faisceaux bicollatéraux.

1. Mâcles.

Ce groupe comprend les **Rosacées**, les **Malvacées**, les **Géraniacées**, les **Tropæolées**, les **Oxalidées**, les **Cupulifères**, les **Salicinées**, les **Juglandées**, les **Platanées**, qui se distinguent les unes des autres et des familles suivantes par le parcours de leurs faisceaux. Il en est de même de la plupart des **Cornées** et des **Saxifragacées** *(Ribes, Heuchera, Hydrangea)*.

Beaucoup d'**Urticacées** se distinguent immédiatement par leurs laticifères fibreux. Les Cannabinées ne comprennent que deux genres, facilement reconnaissables à leur caractéristique. Les Urticées, les **Polygonacées**, les **Chénopodiacées** *(partim)*, les **Amarantacées** *(partim)* présentent des ressemblances. Cependant le genre *Polygonum* se différencie par son gros faisceau médian supérieur.

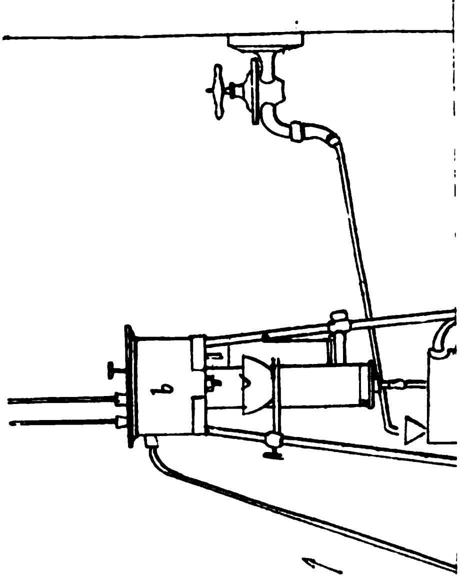
2. Pas de mâcles.

α. Granulations cristallines très nombreuses dans la même cellule........ **Amarantacées** (1), **Chénopodiacées** (1)
β. Cristaux isolés............................ **Légumineuses** (1).
γ. Pas de cristaux (à part les cristaux aciculaires).

Nous trouvons dans ce groupe γ des **Légumineuses** appartenant, sauf quelques exceptions, aux tribus des Podalyriées, des Génistées, des Trifoliées et des Lotées. Elles renferment d'ordinaire du sclérenchyme, à l'exception des *Trifolium* et des *Medicago*. Certaines sont immédiatement reconnaissables à leurs cellules

faisceau libéro-ligneux un canal sécréteur comme dans les Ombellifères; mais il sera facile de distinguer les unes des autres grâce à l'hypoderme collenchymateux, qui est d'ordinaire continu dans les Composées, discontinu dans les Ombellifères.

(1) *Partim*.



ajet

les
ıont

ans
aux
ıire
oup
air.
t le

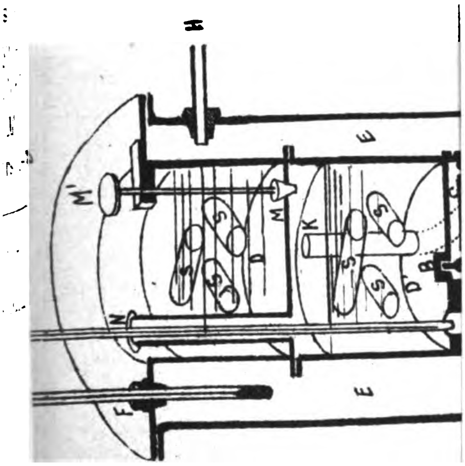
ısus
ıres
ne

ées,
de
ure

ısale
ent,
se);
aux
éni-

érêt
rée.
ıes-
de
· la
les

égé-



39

B.

n

G

d

C

–

fa

s

q

tannifères; beaucoup de Trifoliées se distinguent par le trajet particulier de leurs faisceaux.

Les **Scrophularinées**, les **Oléacées**, les **Borraginées** et les **Labiées** ont un faisceau inférieur prépondérant. Elles sont habituellement dépourvues de sclérenchyme.

Dans les Oléacées, le liber acquiert plus d'importance que dans les Scrophularinées; on y rencontre parfois de petits cristaux prismatiques. Les poils des Borraginées renferment d'ordinaire dans leur membrane des cristaux de carbonate de chaux. Beaucoup de Labiées se distinguent par l'absence de faisceau médian impair.

Dans les familles suivantes, les faisceaux sont parallèles et le médian n'est guère plus gros que les autres.

Les **Papavéracées** et les **Composées** renferment des tissus sécréteurs. Mais les Composées ont ordinairement des fibres épaisses, quelquefois même des fibres scléreuses, qu'on ne retrouve pas chez les Papavéracées.

Les **Crucifères** ont des fibres épaisses comme les Composées, mais ne renferment pas de tissus sécréteurs. Beaucoup de Crucifères peuvent se reconnaître immédiatement à la structure de leurs faisceaux rayonnés.

Les **Renonculacées** se distinguent par la coupe transversale de leurs faisceaux libéro-ligneux (une ellipse allongée radialement, dans laquelle le liber a la forme d'un petit cercle ou d'une ellipse); par l'anneau de sclérenchyme qui parfois entoure ces faisceaux (*Thalictrum*, *Aquilegia*); dans certains cas, par le contour réniforme de la caractéristique (*Ranunculus*).

L'étude du trajet des faisceaux nous a montré tout l'intérêt que présente le pétiole au point de vue de l'anatomie comparée. Le tableau précédent fait ressortir son importance dans les questions de taxinomie, et met en évidence son utilité au point de vue pratique, lorsqu'il s'agit, par exemple, de déterminer la famille d'une plante (fraîche, sèche ou fossile) (1), dont les

(1) Malheureusement, on ne retrouve d'ordinaire les feuilles des anciens végétaux qu'à l'état d'empreinte.

organes floraux font défaut, ou si ces organes existent, pour confirmer les résultats fournis par leur inspection.

Du reste, la valeur des caractères taxinomiques fournis par le pétiole est variable suivant les familles. Parfois, il suffit de cet organe pour déterminer la famille d'une plante (Cupulifères, Salicinées, Juglandées, Géraniacées, Malvacées, etc.) et même son genre *(Pelargonium, Cercis, Bauhinia, Liquidambar, Platanus);* mais il est évident qu'il n'en est pas toujours ainsi. En tout cas, on peut, grâce au pétiole, classer une plante dans un groupe restreint, et d'ordinaire reconnaître, à défaut de la tige, si elle est herbacée ou ligneuse.

CONCLUSIONS

Je terminerai ce mémoire en indiquant brièvement les principaux résultats de mes recherches. Elles ont porté sur près de cinq cents espèces, réparties entre trois cents genres et quarante-huit familles; elles nous ont fait connaître :

1° Le parcours des faisceaux libéro-ligneux dans un grand nombre de pétioles. Jusqu'à présent cette étude avait été négligée par les botanistes;

2° La possibilité de grouper les nombreux trajets étudiés en un petit nombre de types. Quelques-uns de ces types caractérisent une famille, une tribu ou un genre. Les plus curieux se rencontrent chez les Géraniacées, Malvacées, Cornées, Cupulifères, Salicinées, Juglandées, Platanées, Bauhiniées, Liquidambarées;

3° La loi qui préside à la disposition générale des faisceaux libéro-ligneux, dans le pétiole des plantes herbacées et ligneuses. Le plus souvent ils sont isolés dans le premier cas, soudés ensemble dans le second;

4° L'importance du pétiole pour la taxinomie [1].

---

[1] Voir la Note additionnelle, p. 404.

EXPLICATION DES PLANCHES.

Planche I.

Schémas du parcours des faisceaux libéro-ligneux dans différents pétioles.

Nota. — Les grossissements (G) indiqués ne se rapportent qu'aux longueurs; les largeurs sont beaucoup plus amplifiées.

Figures

1. Dicentra spectabilis. $G = \frac{2}{3}$.
2. Schéma du trajet des faisceaux à la base du pétiole chez certaines Légumineuses, Cornées et Sambucées, etc.
3. Ononis Natrix. $G = 1$.
4. Nigella damascena. $G = \frac{1}{2}$.
5. Sanguisorba officinalis. $G = 1$.
6. Comarum palustre. $G = 1$.
7. Spiræa Ulmaria. $G = 4$.
8. Trollius europæus. $G = \frac{1}{2}$.
9. Ecballium Elaterium.
   M faisceau médian inférieur.
   m faisceau médian supér^r. $G = \frac{1}{2}$

Figures

10. Geranium rotundifolium. $G = \frac{1}{2}$.
11. Adonis autumnalis. $G = 2$.
12. Ranunculus Baudotii.
13. Geum urbanum. $G = 1$.
14. Vicia Dumetorum. $G = 4$.
15. Delphinium Staphysagria. $G = \frac{1}{3}$.
16. Maclura aurantiaca. Base du pétiole.
17. Sorbus aucuparia.
18. Ranunculus ficaria. $G = \frac{1}{3}$.
19. Prunus Lauro-cerasus. $G = 4$.
20. Pyrethrum Parthenium. $G = \frac{1}{2}$.
21. Trifolium pratense. $G = \frac{1}{5}$.
22. Blitum bonus-Henricus. $G = \frac{1}{4}$.

Planche II.

Dans cette planche et dans les suivantes, les figures représentent, sauf indication contraire, des *caractéristiques*. Les chiffres entre parenthèses indiquent la distance des coupes transversales, à partir de la base du pétiole.

Figures

1. Urtica dioica. $G = 5$.
2. Parietaria officinalis. $G = 11$.
3. Cecropia peltata. $G = 1.5$.
4. Ficus elastica. $G = 2$.
5. Ficus repens. $G = 5$
6. Ficus Carica. $G = 2.5$.
7. Artocarpus integrifolia. $G = 4$.
8. Humulus Lupulus. $G = 6$.
9. Cannabis sativa. $G = 8$.
10. Morus alba. $G = 3$.
11. Morus nigra. $G = 5.5$,

Figures

12. Broussonetia papyrifera. $G = 4$.
13. Maclura aurantiaca. $G = 5.5$.
14. Dorstenia Massoni. $G = 6.5$.
15. Celtis australis. $G = 7$.
16. Planera crenata. $G = 8$.
17. Ulmus campestris. $G = 5.5$.
18. Castilloa elastica. $G = 2$.
19. Polygonum Bistorta. $G = 2$.
20. Polygonum lapathifolium. $G = 4$.
21. Polygonum amphibium. $G = 6.5$.
22. Polygonum cuspidatum. $G = 3.5$.

Figures

23. Rumex acetosella. G = 8.
24. Chenopodium album. G = 7.
25. Rumex obtusifolius. G = 3.
26. Rumex Hydrolapathum. G = 2.
27. Rheum officinale. G = 1.
28. Chenopodium murale. G = 4.
29. Blitum bonus-Henricus. G = 3.
30. Beta vulgaris. G = 2.
31. Beta maritima. G = 4.
32. Atriplex hortensis. G = 9.
33. Atriplex portulacoïdes. G = 6.5.
34. Basella rubra. G = 2.
35. Boussingaultia baselloides. G = 3.
36. Celosia cristata. G = 5.
37. Amarantus caudatus. G = 3.
38. Gomphrena globosa. G = 4.
39. Phytolacca decandra. G = 3.
40. Bœhmeria utilis.
41. Castanea vesca. G = 4.
42. Quercus pedunculata (0^{m}).
43. Id. ($1^{mm}6$).
44. Id. (8^{mm}). G = 10.
45. Alnus glutinosa (0^{mm}). G = 8.
46. Id. (7^{mm}). G = 8.
47. Id. (15^{mm}). G = 8.
48. Id. (20^{mm}). G = 8.
49. Id. (25^{mm}). G = 8.
50. Corylus avellana (0^{mm}). G = 4.
51. Id. ($0^{mm}2$). G = 4.
52. Id. ($1^{mm}2$). G = 8.

Figures

53. Corylus avellana (10^{mm}). G = 8.
54. Id. (12^{mm}). G = 8.
55. Id. (14^{mm}). G = 8.
56. Id. Caractéristique (20^{mm}). G = 9.
57. Betula papyracea. G = 6.5.
58. Carpinus Betulus (0^{mm}). G = 10.
59. Id. (2^{mm}). G = 10.
60. Id. Caractéristique (6^{mm}). G = 10.
61. Ostrya virginiana (1^{mm}).
62. Id. (2^{mm}).
63. Id. (7^{mm}).
64. Ostriopsis davidiana.
65. Fagus sylvatica ($0^{mm}5$).
66. Id. ($2^{mm}5$).
67. Id. Caractéristique (8^{mm}).
68. Juglans regia.
69. Carya juglandiformis.
70. Carya alba.
71. Pterocarya fraxinifolia (10^{mm}).
72. Id. Caractéristique (60^{mm}).
73. Pterocarya caucasica.
74. Salix fragilis. G = 8.
75. Salix cinerea. G = 3.
76. Salix fragilis-alba (0^{mm}). G = 5.
77. Id. (2^{mm}). G = 5.
78. Id. (3^{mm}). G = 5.
79. Id. Caractéristique (12^{mm}). G = 5.

Planche III.

Figures

1. Populus alba (0^{mm}). G = 7.
2. Id. ($1^{mm}5$). G = 7.
3. Id. (2^{mm}). G = 7.
4. Id. (3^{mm}). G = 7.
5. Id. (4^{mm}). G = 7.
6. Id. (12^{mm}). G = 7.
7. Id. Caractéristique (40^{mm}). G = 7.
8. Liquidambar imberbe (0^{mm}).
9. Id. (2^{mm}).
10. Id. (6^{mm}).
11. Id. (11^{mm}).
12. Id. (38^{mm}).
13. Platanus occidentalis (0^{mm}).
14. Id. (5^{mm}).

Figures

15. Platanus occidentalis (7^{mm}).
16. Id. (9^{mm}).
17. Id. (15^{mm}).
18. Id. (27^{mm}).
19. Id. (35^{mm}).
20. Id. (38^{mm}).
21. Id. Caractéristique (42^{mm}).
22. Clematis vitalba. G = 6.5.
23. Thalictrum majus. Initiale. G = 4.
24. Thalictrum speciosum. G = 3.
25. Anemone sylvestris. G = 5.
26. Adonis autumnalis. G = 8.
27. Ranunculus Ficaria. G = 3.
28. Ranunculus calthæfolius. G = 4.
29. Ranunculus velutinus. G = 4.

Figures

30. Ranunculus millefoliatus. G = 5.5.
31. Ranunculus parviflorus. G = 8.
32. Ranunculus Philonotis. G = 5.5.
33. Ranunculus trichophyllus. G = 4.
34. Ranunculus Baudotii. Feuille immergée. G = 9.
35. Ranunculus Baudotii. Feuille émergée. G = 9.
36. Ranunculus flammula. G = 4.
37. Caltha palustris. G = 5.
38. Trollius europæus. G = 5.
39. Helleborus niger. G = 3.
40. Helleborus viridis. G = 3.
41. Nigella damascena. G = 4.
42. Delphinium staphysagria. G = 5.5.
43. Aconitum Napellus. G = 4.
44. Pæonia Broteri. G = 4.
45. Pæonia Moutan. G = 2.
46. Aquilegia. G = 6.
47. Liriodendron tulipifera. (0^{mm}).
48. Id. (102^{mm}).
49. Id. Caractéristique (110^{mm}).
50. Magnolia grandiflora. G = 4.
51. Prunus Lauro-cerasus. G = 5.

Figures

52. Spiræa Ulmaria. G = 4.
53. Quillaja saponaria. G = 6.
54. Rubus Idæus. G = 3.
55. Comarum palustre.
56. Agrimonia Eupatoria. G = 4.
57. Sanguisorba officinalis. G = 5.
58. Rosa canina. G = 11.
59. Cydonia vulgaris. G = 6.5
60. Raphiolepis ovata. G = 4.
61. Sorbus latifolia.
62. Sorbus aucuparia (30^{mm}).
63. Anagyris fætida. G = 7.
64. Lupinus. G = 3.
65. Sarothamnus scoparius. G = 16.
66. Ononis Natrix. G = 7.
67. Medicago lupulina. G = 9.
68. Melilotus parviflorus. G = 12.
69. Trifolium incarnatum. G = 7.
70. Trifolium pratense. G = 8.
71. Lotus corniculatus. G = 10.
72. Psoralea stachydis. G = 4.
73. Amorpha fruticosa. G = 8.
74. Indigofera Dosua. G = 10.

Planche IV.

Figures

1. Galega officinalis. G = 3.
2. Robinia pseudo-Acacia. G = 7.
3. Colutea arborescens. G = 6.
4. Glycyrhiza glabra. G = 5.
5. Ornithopus ebracteatus. G = 12.
6. Hedysarum. G = 14.
7. Desmodium canadense. G = 5.
8. Vicia angustifolia. G = 12.
9. Vicia altissima. G = 6.
10. Vicia Dumetorum. G = 6.
11. Faba vulgaris. G = 2.5.
12. Lathyrus sphæricus. G = 6.
13. Glycine sinensis. G = 5.
14. Erythrina Crista-Galli. G = 5.
15. Apios tuberosa. G = 5.
16. Dalbergia latisiliqua. G = 9.
17. Sophora japonica. G = 6.5.
18. Toluifera Balsamum. G = 4.
19. Cæsalpinia echinata. G = 4.
20. Cassia. G = 6.
21. Ceratonia siliqua. G = 6.

Figures

22. Tamarindus indica. G = 11.
23. Acacia Julibrissin. G = 6.
24. Acacia Lophanta. G = 10.
25. Mimosa pudica.
26. Cytisus Laburnum (0^{mm}). G = 5.5.
27. Id. ($0^{mm}5$). G = 5.5.
28. Id. (1^{mm}). G = 5.5.
29. Id. (2^{mm}). G = 5.5.
30. Id. Caractéristique. G = 7.
31. Cercis siliquastrum. (0^{mm}). G = 5.
32. Id. (3^{mm}). G = 5.
33. Id. (4^{mm}). G = 5.
34. Id. (27^{mm}). G = 5.
35. Id. (32^{mm}). G = 5.
36. Id. Caractér. (35^{mm}). G = 5.
37. Geranium rotundifolium (0^{mm}). G = 3.
38. Geranium rotundifolium (3^{mm}). G = 3.
39. Geranium rotundifolium. Caractéristique (75^{mm}). G = 8.

Figures

40. Erodium gruinum (0^{mm}). G = 4.
41. Id. Caractér. (60^{mm}). G = 5.
42. Pelargonium hederæfolium (0^{mm}).
43. Id. (50^{mm}).
44. Pelargonium zonale. G = 5.
45. Geranium Wellichianum.
46. Oxalis tetraphylla (0^{mm}).
47. Id. (13^{mm}).
48. Id. Pseudo-initiale (14^{mm}).
49. Id. (185^{mm}). G = 3.
50. Id. Caract. (200^{mm}). G = 3.
51. Tropælum majus. Initiale. G = 2.
52. Id. Caractéristique. G = 5.
53. Impatiens glanduligera. G = 4.
54. Althæa officinalis. Initiale. G = 5.5.
55. Id. Caractéristique. G = 5.5.
56. Althæa rosea. G = 3.
57. Lavatera arborea. G = 2.5.
58. Malva rotundifolia. G = 6.
59. Malva sylvestris. G = 5.

Figures

60. Hibiscus Rosa-sinensis. Init^{e}. G = 4.
61. Gossypium herbaceum. G = 3.
62. Entelea palmata. Initiale. G = 4.
63. Id. Caractéristique. G = 6.
64. Entelea arborescens. G = 2.
65. Corchorus olitorius. G = 4.
66. Sparmannia. G = 3.
67. Tilia sylvestris. G = 6.
68. Aristotelia Maqui. G = 5.
69. Theobroma Cacao. G = 4.
70. Sterculia Acerifolia. G = 3.
71. Bauhinia racemosa (0^{mm}).
72. Id. (1^{mm}).
73. Id. (2^{mm}).
74. Id. (11^{mm}).
75. Id. (24^{mm}).
76. Id. (56^{mm}).
77. Id. (60^{mm}).
78. Id. (61^{mm}).
79. Id. (65^{mm}).

Planche V.

Figures

1. Barbarea vulgaris. G = 5.
2. Cochlearia officinalis. G = 4.
3. Sisymbrium officinale. G = 4.
4. Brassica Napus. G = 5.
5. Brassica oleracea. G = 2.
6. Sinapis incana. G = 5.
7. Lepidium latifolium. G = 2.
8. Crambe cordifolia. G = 2.
9. Raphanus Raphanistrum. G = 4.
10. Papaver dubium. G = 4.
11. Chelidonium majus. G = 4.
12. Eschscholtzia californica. G = 7.
13. Bocconia cordata. G = 2.
14. Fumaria officinalis. G = 5.
15. Fumaria parviflora. G = 8.
16. Corydalis lutea. G = 8.
17. Dicentra spectabilis. G = 6.
18. Eucalyptus.
19. Myrtus communis.
20. Fuchsia fulgens.
21. Jussiæa grandiflora.
22. Heuchera americana. G = 5.5.
23. Hydrangea Hortensia. G = 3.
24. Philadelphus coronarius. G = 6.5.
25. Escallonia floribunda. G = 5.5.

Figures

26. Saxifraga cordifolia. G = 3.
27. Lagenaria vulgaris.
28. Luffa acutangula.
29. Cucumis sativus.
30. Cyclanthera explodens.
31. Begonia discolor.
32. Thapsia garganica.
33. Echinophora trichophyllus.
34. Peucedanum officinale.
35. Heracleum hypoleucum.
36. Pastinaca sativa.
37. Pastinaca opaca.
38. Angelica.
39. Fœniculum officinale.
40. Conium maculatum.
41. Apium graveolens.
42. Helosciadum nudiflorum.
43. Berula angustifolia.
44. Ægopodium Podagraria.
45. Anthriscus Cerefolium.
46. Eryngyum campestre. Initiale.
47. Id. Caractéristique.
48. Eryngyum maritimum.
49. Hydrocotyle vulgaris.
50. Hedera Helix.

Figures

51. Panax filicifolia.
52. Aralia spinosa.
53. Fatsia japonica.
54. Hedera.
55. Cornus sericea. G = 6.
56. Benthamia fragifera. G = 6.
57. Aucuba japonica. G = 4.
58. Griselinia littoralis. G = 4.
59. Helwingia rusciflora. G = 6.
60. Nyssa aquatica. G = 4.
61. Lycopersicum esculentum. G = 3.
62. Solanum melongena. G = 2.
63. Capsicum annuum. G = 7.
64. Atropa Belladona. G = 3.5.
65. Datura Stramonium. G = 2.
66. Hyoscyamus niger. G = 5.
67. Nicotiana glauca. G = 2.5.
68. Nierembergia palustris. G = 9.
69. Verbascum nigrum. G = 2.
70. Calceolaria chelidonioides. G = 3.5.

Planche VI.

Figures

1. Linaria cymbalaria. G = 10.
2. Maurandia antirrhiniflora. G = 9.
3. Lophospermum scandens. G = 5.
4. Phygelius capensis. G = 5.
5. Scrophularia aquatica. G = 2.
6. Paulownia imperialis. G = 2.
7. Pensteinon speciosus. G = 2.
8. Digitalis purpurea. G = 3.5.
9. Hydrophyllum canadense. G = 4.5.
10. Wigandia caracassana. G = 1.
11. Cobæa scandens. G = 7.
12. Convolvulus Sepium. G = 6.
13. Ipomæa Batatas. G = 3.
14. Hoya carnosa. G = 2.
15. Vincetoxicum nigrum. G = 4.
16. Marsdenia erecta. G = 4.5.
17. Periploca græca. G = 6.
18. Vinca minor. G = 6.5.
19. Nerium oleander. G = 3.5.
20. Apocynum venetum. G = 10.
21. Lochnera rosea. G = 4.5.
22. Jasminum fruticans. G = 9.
23. Forsythia suspensa. G = 5.
24. Syringa vulgaris. G = 5.
25. Fraxinus excelsior (48mm). G = 5.
26. Id. Caractér. (60mm). G = 5.
27. Phylliræa angustifolia. G = 10.
28. Ligustrum vulgare. G = 9.
29. Bignonia grandiflora. G = 4.
30. Catalpa bignonioides. G = 3.
31. Acanthus mollis. G = 15.
32. Thunbergia alata. G = 4.
33. Callicarpa japonica. G = 3.5.
34. Clerodendron fœtidum. G = 4.
35. Vitex Agnus-castus. G = 5.
36. Perilla nankinensis. G = 4.5.
37. Salvia pratensis. G = 3.
38. Salvia verbenaca. G = 3.5.
39. Brunella vulgaris. G = 8.
40. Marrubium vulgare. G = 3.5.
41. Glechoma hederacea.
42. Ocimum basilicum. G = 5.5.
43. Scutellaria. G = 9.
44. Heliotropium europæum. G = 10.
45. Cynoglossum pictum. G = 2.
46. Symphytum officinale. G = 2.
47. Borrago officinalis.
48. Anchusa sempervirens. G = 3.
49. Cordia sebestana. G = 4.
50. Lonicera flava. G = 7.
51. Viburnum Opulus. G = 8.
52. Sambucus Ebulus. G = 4.
53. Hebeclinium urolepis. G = 5.
54. Polymnia edulis. Caractér. G = 3.
55. Id. Initiale. G = 1.5.
56. Achillæa Ageratum. G = 8.
57. Inula Helenium. G = 1.
58. Pyrethrum Parthenium. G = 9.
59. Lappa minor. G = 2.
60. Centaurea candidissima. G = 4.
61. Helianthus tuberosus. G = 3.
62. Dahlia coccinea.
63. Cephalaria tatarica. G = 3.
64. Artocarpus integrifolia. Coupe longitudinale du pétiole.
65. Anagyris fœtida. Coupe transversale de la partie inférieure du pétiole.
66. Atriplex portulacoides. Coupe transversale du pétiole.

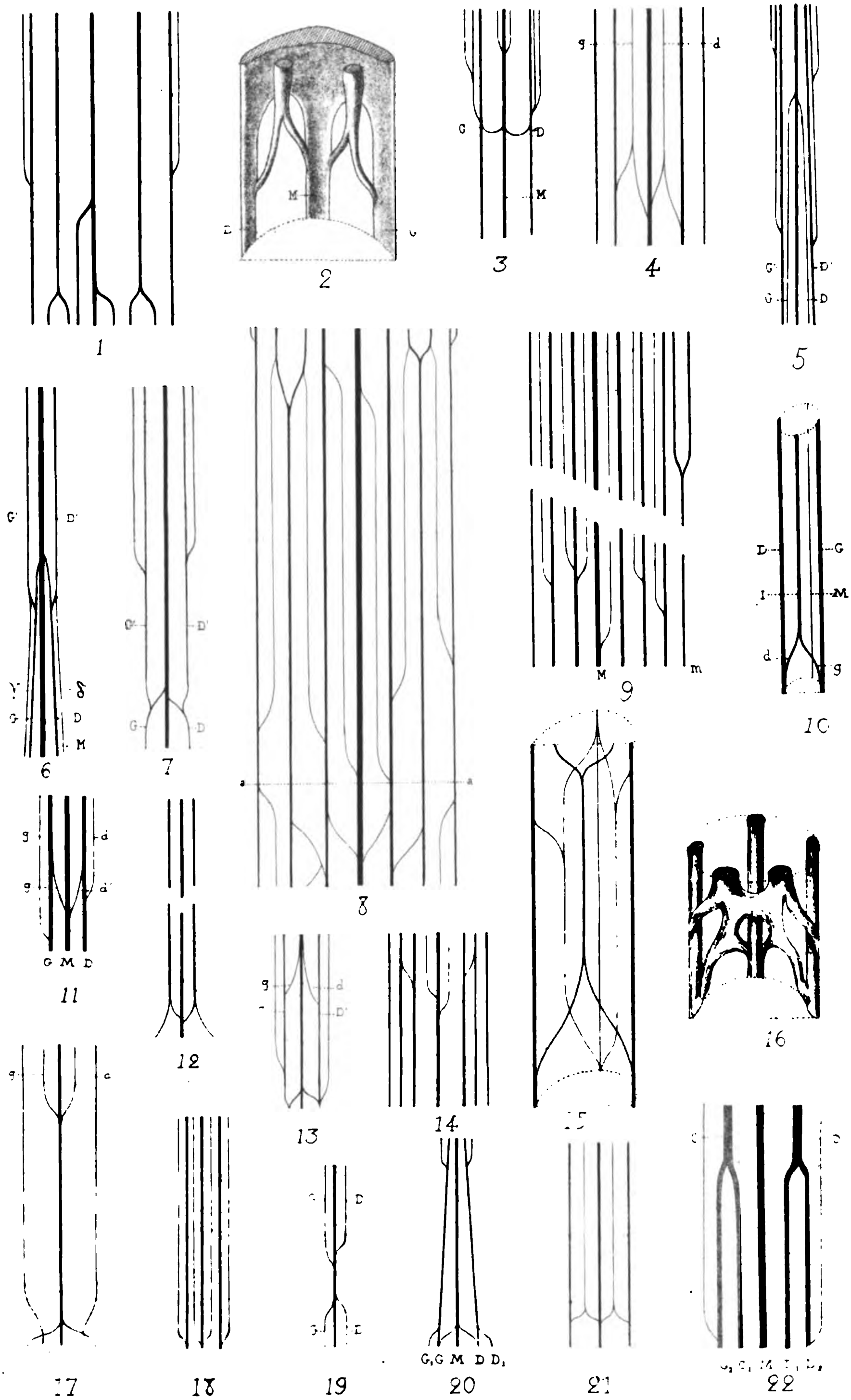
INDEX ALPHABÉTIQUE

DES FAMILLES ÉTUDIÉES DANS CE MÉMOIRE.

NOTE ADDITIONNELLE.

L'impression de ce mémoire était presque terminée, quand j'ai appris par le *Journal of the royal microscopical Society* (octobre 1887, n° 5, p. 775), que M. le Dr Acqua avait publié cette année même, dans le *Malpighia* (p. 267-282), un travail sur le « *Passage of fibro-vascular bundles from the branch to the leaf* ». Ce botaniste « *agreeing generally with the observations of Petit* » pense que le pétiole peut « *in many cases, be usefully observed for systematic purposes* ».

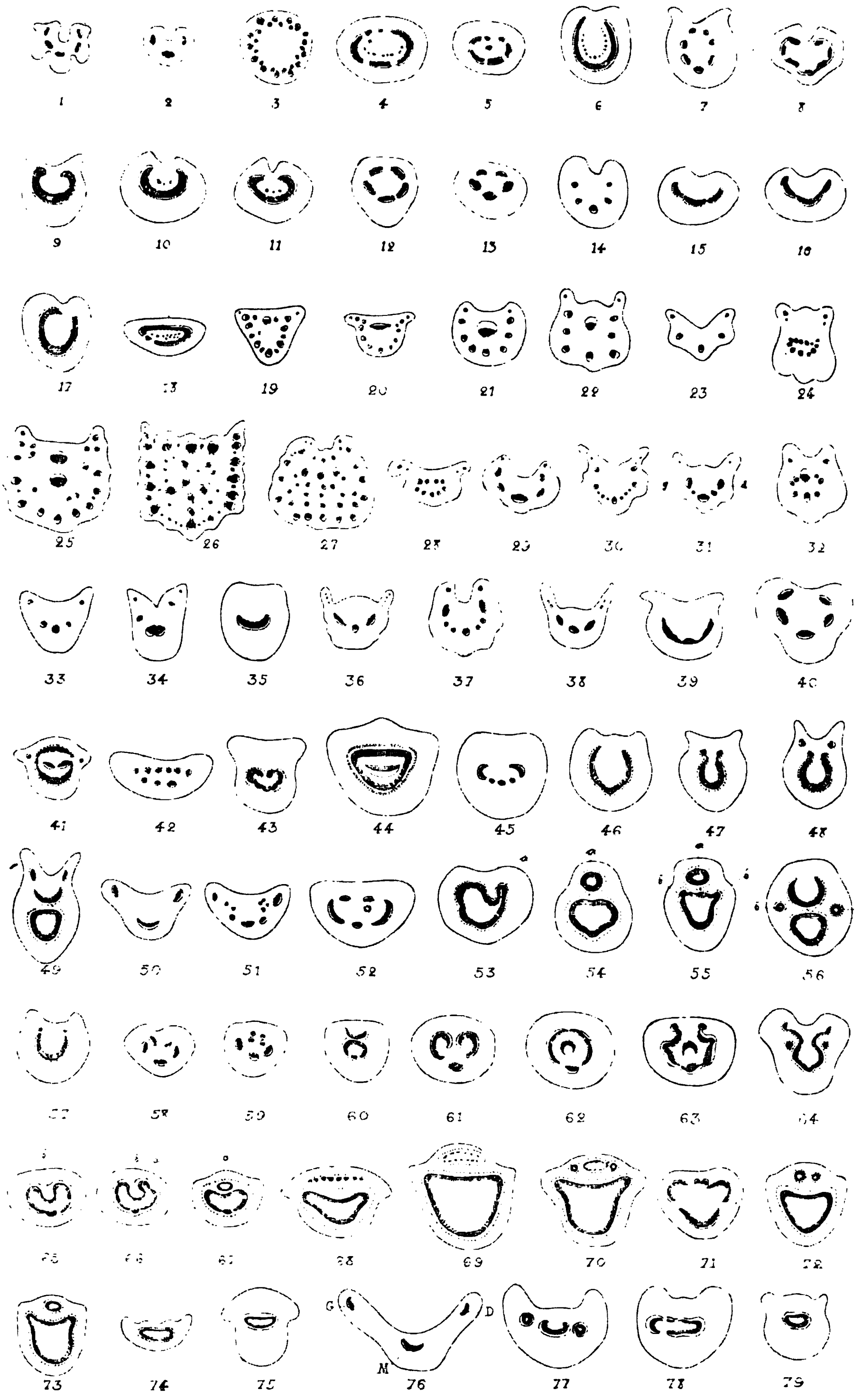
Je rappelle à ce propos que j'ai résumé précédemment le résultat de mes recherches dans deux notes insérées dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (séances des 11 et 26 octobre 1886).



Soc. Sc. Ph. et Nat.
de Bordeaux.
T. III, (1887).

Louis Petit del.

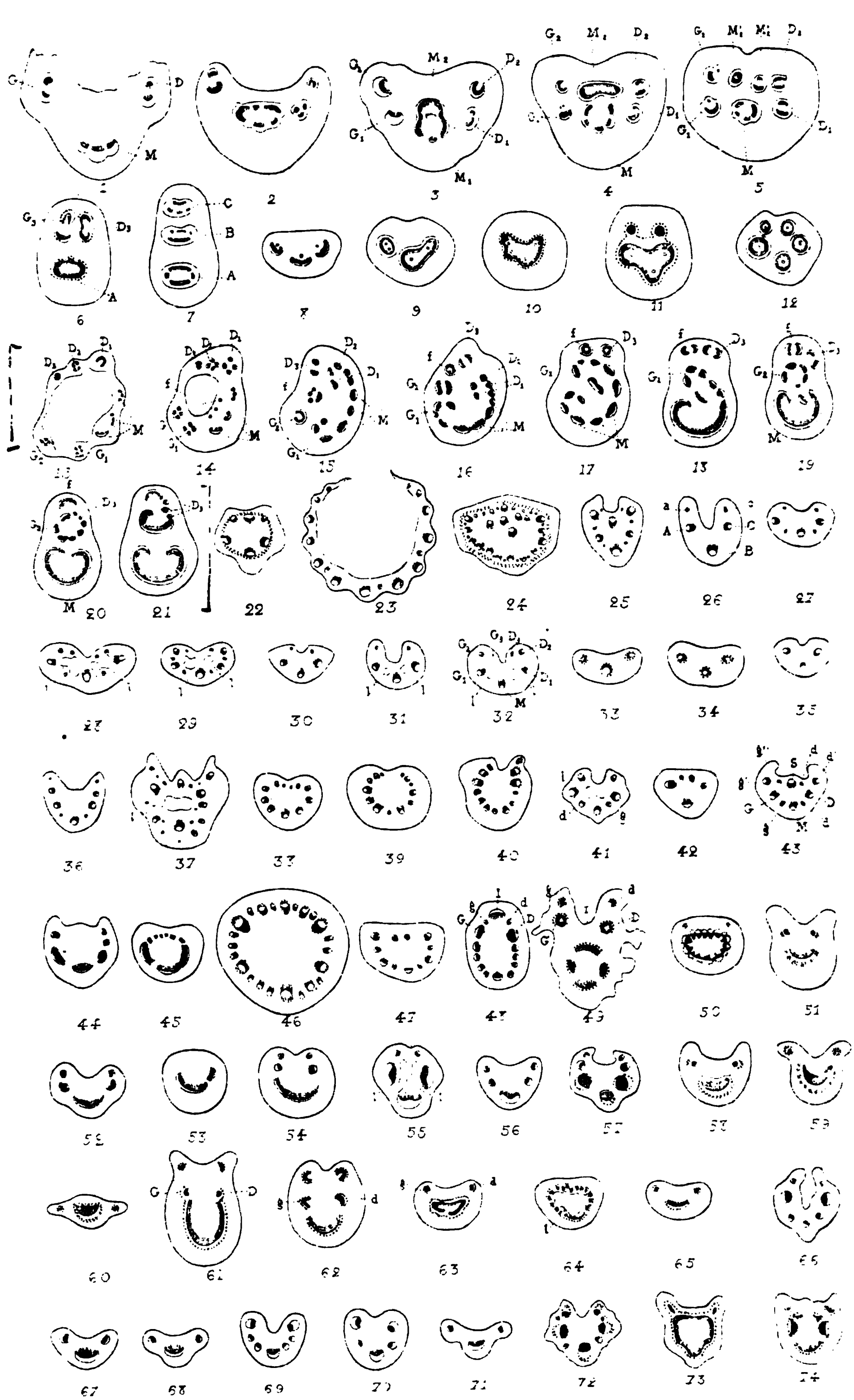
Lith. Reday-Hachette, Bordeaux.



Soc. Sc. Ph. et Nat. de Bordeaux.
T. III, (1887).

Louis Petit del.

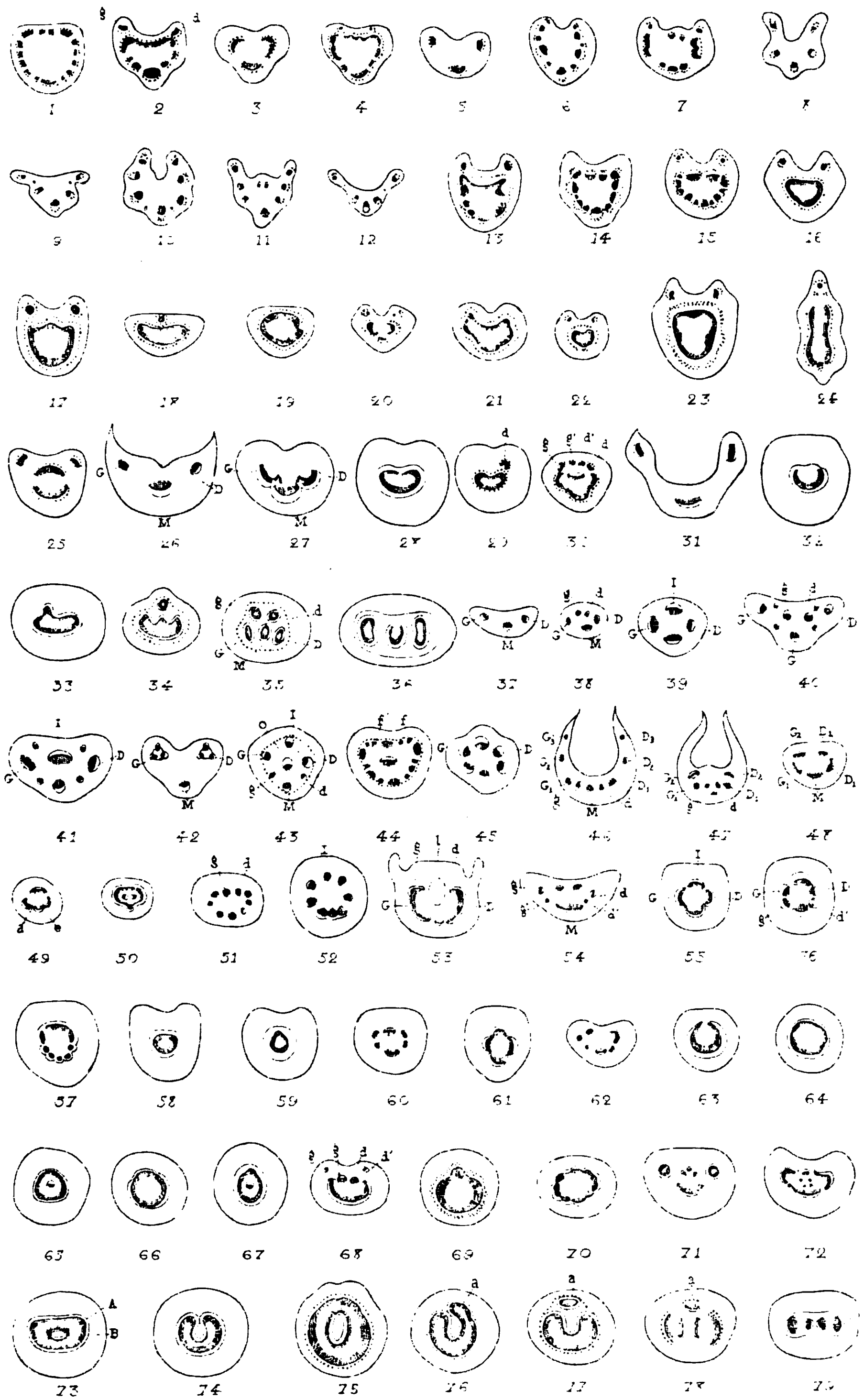
Lith. Reday-Hachette, Bordeaux.



Soc. Sc. Ph et Nat. de Bordeaux.
T. III₃ (1887).

Louis Petit del.

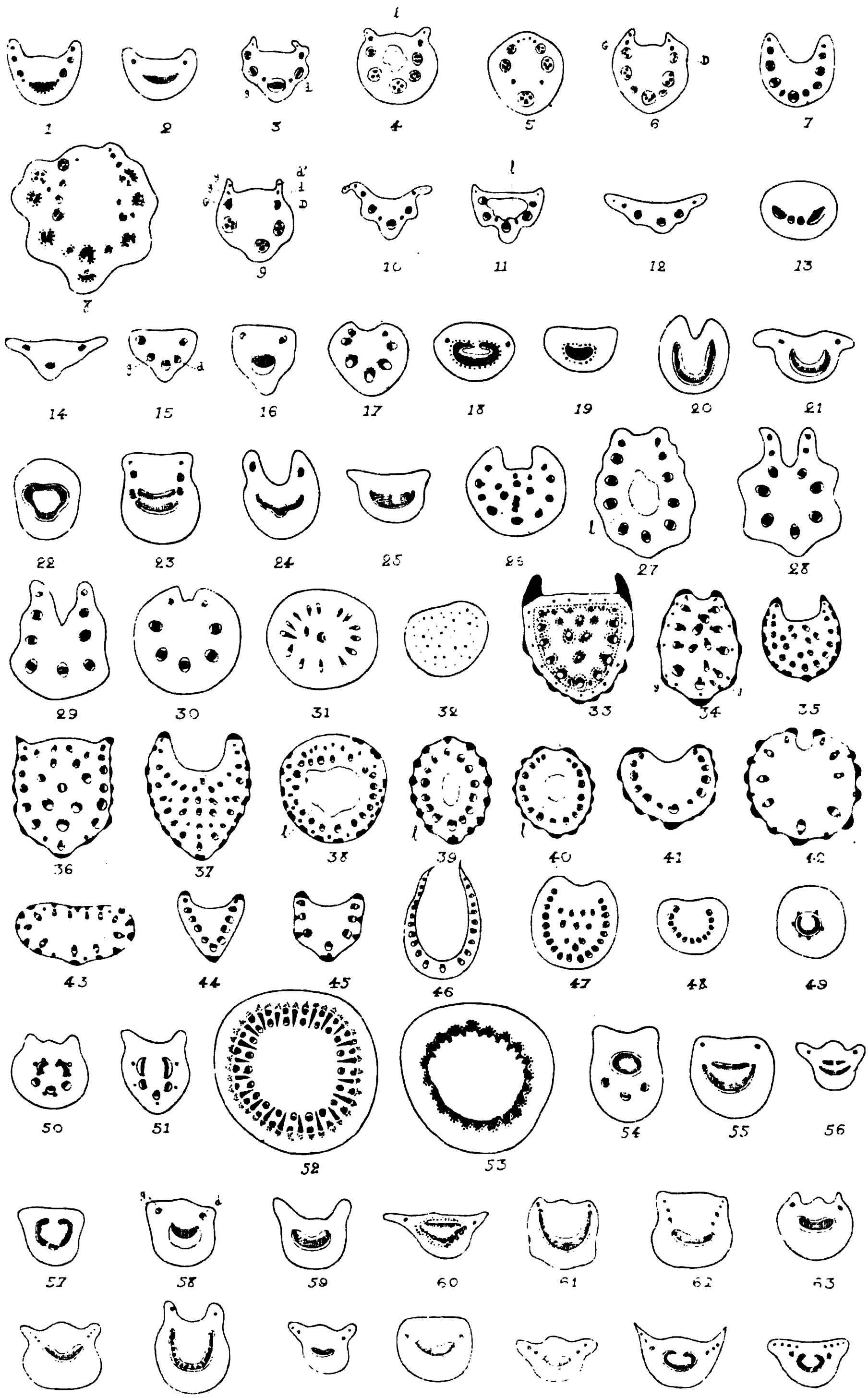
Lith. Reday-Hachette, Bordeaux



Soc. Sc. Ph. et Nat.
de Bordeaux.
T. III$_3$ (1887).

Louis Petit del.

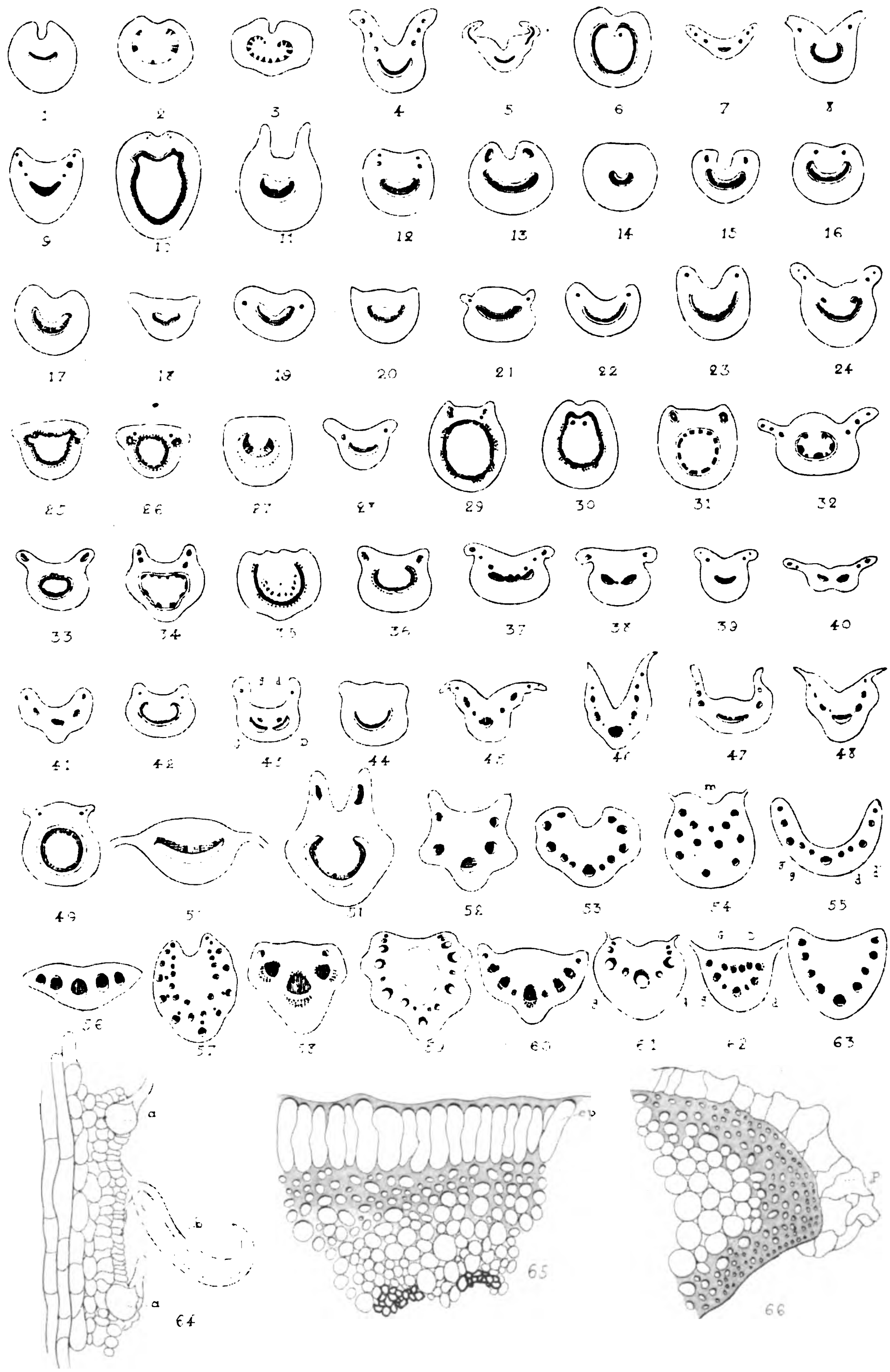
Lith. Redau-Hachette Bordeaux.



Louis Petit del.

Lith. Reday-Hachette, Bordeaux

Pl. VI



Soc. Sc. Ph. et Nat. de Bordeaux. T. III, 3 (1887).

Louis Petit del.

Lith. Reday-Hachette, Bordeaux

NOUVEL APPAREIL

POUR

MESURER LA FLUIDITÉ DES HUILES

ET AUTRES LIQUIDES

PAR MM. E. BERLAND ET A. CHENEVIER

Depuis longtemps on s'est occupé de mesurer l'action des forces moléculaires connues sous le nom de capillarité, soit pour étudier les propriétés mêmes des liquides, soit comme moyen analytique pour différencier et doser ceux qui se trouvent souvent en mélange naturel ou accidentel.

Or, si cette propriété est déjà importante et varie dans de larges limites pour des corps aussi mobiles que les alcools, elle est encore bien plus importante pour les huiles dont la consistance est si variable, depuis l'état solide jusqu'à une mobilité au moins égale à celle de l'eau. Nombre d'appareils ont été construits pour l'évaluation de ces effets qui sont généralement désignés sous le nom de fluidité. Nous allons d'abord passer en revue les principaux, puis décrire notre appareil. C'est grâce à l'appui de M. Millet, ingénieur en chef du matériel et de la traction des Chemins de fer du Midi, que nous avons pu effectuer notre travail. L'exécution de l'appareil est due au bureau des études et aux ateliers de la Compagnie.

Nous nous sommes proposé un double but :

1° Étudier les qualités lubréfiantes des huiles;

2° Faciliter leur analyse en ajoutant un nouveau caractère physique qui vînt seconder les données précieuses de la densité.

Anciens appareils

1° L'appareil le plus simple et le plus ancien se compose d'un flacon muni d'une tubulure inférieure fermée d'un bouchon traversé par un tube de diamètre et de longueur déterminés. On remplit le flacon d'huile et on pèse la quantité de liquide écoulé pendant un temps donné, trois minutes par exemple. L'opération se fait à la température du laboratoire qui ne peut être réglée à volonté. En outre, la pression est très variable à cause de la vitesse même d'écoulement et de la variation de densité des échantillons. C'est donc un appareil très grossier et très imparfait. Mais il est encore fort répandu dans l'industrie, surtout pour les huiles de résine.

2° Une burette graduée entourée d'un cylindre en verre avec fond et couvercle en laiton, dans cet espace circule de la vapeur d'eau. Quand l'huile contenue dans la burette est à 50°, on ouvre le robinet inférieur et on mesure le temps employé pour écouler un volume déterminé, 100 centimètres cubes par exemple. Là encore, pression et température irrégulières, difficulté à observer la fin de l'opération, la densité a une trop grande importance dans la fonction et l'orifice est mal calibré.

3° L'appareil de Fischer, qui se compose d'un cylindre en cuivre qui reçoit l'huile. Le tube d'écoulement évasé à ses deux extrémités en forme d'entonnoir est en platine renfermé dans un tube de cuivre plus épais, on peut le fermer à l'aide d'un cône porté au bout d'une tige. Le tout est entouré d'un manchon qui reçoit l'eau de chauffage.

Pour faire un essai, on remplit d'huile jusqu'à une hauteur déterminée et on chauffe l'eau à la température voulue. On place sous l'orifice d'écoulement une fiole jaugée et on note le temps que met à s'écouler un volume déterminé de liquide.

Cet appareil a sur les précédents l'avantage d'un orifice bien calibré; le récipient est plus large, mais la température et la pression sont encore variables. La fin de l'opération n'est pas encore bien nette.

4° L'ixomètre de M. Barbey, sous-chef du laboratoire des Chemins de fer de l'Est, appareil construit par Wiesneg, qui se compose d'un système de tubes en U, en laiton, formé d'un gros tube vertical communiquant à sa partie inférieure avec un petit tube également vertical par l'intermédiaire d'un tube horizontal. Une tige en acier étiré est introduite dans le petit tube vertical, de manière à former à l'intérieur de ce tube un espace annulaire capillaire de dimensions parfaitement déterminées. La partie large du tube en U est surmontée d'un entonnoir à trop-plein et la branche la plus étroite se termine par un petit déversoir.

Le système de tubes en U est entouré d'un bain-marie en laiton dans lequel plongent un régulateur et un thermomètre pour pouvoir donner au bain-marie la température désirée.

Pour déterminer la viscosité d'un liquide, on remplit l'appareil en faisant entrer le liquide en léger excès par l'entonnoir à trop-plein, on chauffe le bain-marie et on mesure à la température de l'expérience le volume de liquide écoulé dans un temps donné.

Nouvel appareil.

Description. — Notre appareil se compose, comme l'ixomètre Barbey, d'un système de tubes en U AA'. Ces tubes ont été préparés avec beaucoup de soin, alésés au tour pour avoir le même diamètre dans toute leur longueur. Le second tube vertical A' est muni d'une tige en métal B parfaitement calibrée, venant se placer à l'intérieur de ce tube dans une position invariable. En effet, la tige porte à son extrémité supérieure un épaulement et une partie tronconique qui vient s'engager dans un logement de même capacité, elle est fixée à son extrémité inférieure par une vis à nombreux filets. Enfin le tube en U se prolonge par un tube déversoir *c* pour écouler le liquide.

Au-dessus des tubes nous avons placé deux réservoirs D et D' où l'huile doit prendre sa température. Ces réservoirs sont traversés en plusieurs sens par des tubes *s* communiquant avec l'enveloppe pour multiplier les surfaces de chauffe. Un trop-

plein K maintient le niveau du liquide toujours constant dans le réservoir D′, en même temps que le bouchon conique M, manœuvré par la tige à vis M′, permet de régler l'écoulement du réservoir D au réservoir D′.

Tout cet ensemble de tubes et de réservoirs est entouré d'une seconde enveloppe en cuivre laissant un espace vide E assez grand pour y faire circuler facilement des vapeurs ou des liquides. Cette seconde enveloppe est percée de quatre ouvertures. Par deux de ces ouvertures F et G passent deux thermomètres pouvant donner les températures extrêmes de l'enceinte. Les deux autres H et I servent à l'entrée et à la sortie des vapeurs ou liquides devant échauffer l'appareil.

En outre, pour le bon réglage de la température, nous avons ménagé en N le passage d'un thermomètre à tige fine, qui, traversant les deux réservoirs, a sa boule à l'origine du circuit de l'huile dans les tubes en U. Au moyen de ces dispositifs, on est sûr que les huiles les moins conductrices de la chaleur arrivent à s'échauffer d'une manière uniforme et aussi parfaite que possible.

Tout l'appareil est porté sur un trépied métallique à large base, qui lui assure la plus grande stabilité.

Fonctionnement. — Pour obtenir des températures bien certaines et bien uniformes, nous avons employé des courants de vapeur circulant dans l'enceinte de l'appareil de haut en bas (voir figure 2). Les vapeurs produites dans le ballon *a* viennent circuler en *b* dans l'appareil et vont se condenser dans le réfrigérant à serpentin *c* d'où elles retombent dans le ballon *a* par le tube *d* qui plonge dans le liquide à son extrémité inférieure et communique par son extrémité supérieure *e* avec l'atmosphère afin d'éviter toute variation de pression dans l'appareil. Comme nous avions à nous servir d'éther et de sulfure de carbone pour les températures inférieures à 50°, nous avons ajouté à notre appareil un second ballon *f* rempli d'eau, qui en bouillant échauffe à distance le ballon *a* par la vapeur qu'elle envoie dans le bain-marie *g*. De cette manière, tout risque d'incendie et d'explosion

était évité. Quand on emploie l'alcool on peut simplement chauffer le ballon *a* au bain de sable. C'est avec ces trois vapeurs, éther, sulfure de carbone et alcool que nous avons fixé nos points principaux.

On pourrait ensuite facilement obtenir les températures intermédiaires avec des vapeurs d'autres liquides ou des mélanges de ceux-ci. Mais nous avons trouvé plus commode, ayant déjà un certain nombre de températures fixées d'une manière très précise, d'obtenir les points intermédiaires à l'aide d'un courant d'eau. En ayant une certaine masse d'eau (10 litres environ) dans un vase en bois épais, elle garde très bien sa température. Un écoulement de demi-litre à la minute est suffisant et les trois thermomètres de l'appareil concordent parfaitement ensemble. Au-dessus de 75°, les pertes de chaleur deviennent notables, mais les déterminations de fluidité deviennent aussi bien moins intéressantes pour la pratique.

L'appareil étant ainsi disposé pour se tenir à une température fixe, on le remplit de liquide à essayer jusqu'en haut du réservoir D et on laisse couler dans les tubes A A', en aspirant au besoin par l'extrémité C afin qu'aucune bulle d'air n'y reste emprisonnée. Quand les trois thermomètres sont arrivés à la température voulue et y restent bien concordants, on peut commencer les mesures. Pour cela, on règle le débit en M de façon que le liquide coule goutte à goutte par le trop-plein K afin d'assurer la constance du niveau, et on recueille dans un vase léger la quantité de liquide écoulé pendant un temps donné (10 minutes par exemple). Ce liquide est pesé et on peut rapporter les chiffres trouvés à la quantité en grammes écoulée à l'heure. Pour les liquides très fluides, si on opère pendant longtemps, on peut remplir le réservoir supérieur D un peu avant qu'il se soit vidé complètement et le liquide versé a un temps suffisant pour se porter à la température de l'expérience avant d'entrer dans les tubes.

Ainsi disposé, notre appareil évite les variations de température, car toutes les parties sont chauffées également par le courant d'eau ou de vapeur. De plus, le liquide chauffé avant son entrée

dans le tube en U est parfaitement homogène et se trouve dans des conditions semblables dans toutes les parties de son trajet.

Un autre avantage, c'est de pouvoir rendre compte de l'influence que peut exercer sur la fluidité une résistance connue, car la section annulaire comprise entre le tube A′ et la tige B est parfaitement déterminée. Les deux diamètres sont 4 et 5 millimètres et les deux surfaces cylindriques de frottement ont une hauteur commune de 20 centimètres. Nous arrivons ainsi à interposer sur le parcours de l'huile une résistance absolument constante et la quantité d'huile écoulée sera fonction de deux variables dépendant de sa qualité :

1° La fluidité ou viscosité proprement dite (résistance que manifestent les liquides au mouvement relatif de leurs molécules) ; 2° l'adhésion contre des parois de nature et de surface déterminées.

Au point de vue de l'appréciation des qualités lubréfiantes des huiles, cette complexité de la fonction est plutôt avantageuse que nuisible, car elle correspond plus exactement aux conditions pratiques du graissage ; c'est grâce à l'adhésion qui s'exerce entre les métaux et l'huile que celle-ci est entraînée dans les organes malgré leurs mouvements relatifs.

Mais il est utile aussi de savoir pour quelle part chacune des variables entre dans les résultats finaux. Si on veut mesurer séparément ces deux quantités, l'espace annulaire résistant peut être supprimé dans notre appareil et pour cela on n'a qu'à retrancher la tige intérieure du tube en U et fermer ce tube par un simple bouchon à vis. En opérant ainsi, les chiffres obtenus correspondront à la viscosité proprement dite. La différence entre ces derniers chiffres et ceux trouvés en employant la tige donnera une idée de la part qui revient à l'adhésion aux parois. On verra plus loin, par nos résultats, que cette adhésion est la partie la plus considérable et la plus intéressante au point de vue pratique.

Nous donnons ci-joint quelques tableaux de résultats obtenus qui sont le produit d'une partie de nos essais. Nous avons joint à chaque tableau le dessin des courbes représentant, d'après ses

données, la marche de la fluidité pour chaque huile. Dans les essais du tableau I, les points fixes ont été obtenus : par un courant d'eau des canalisations de la ville (15°); par des vapeurs d'éther (35°) ; de sulfure de carbone (46°) ; d'alcool (78).

TABLEAU I.

NATURE ET PROVENANCE DE L'HUILE	QUANTITÉS EN GRAMMES D'HUILE ÉCOULÉE A L'HEURE			
	à 15°	à 35°	à 46°	à 78°
Huile de colza soutirée	10,98	25,40	41,70	91,80
Huile de résine rectifiée	8,66	40,20	82,00	259,70
Huile minérale Boniface	17,83	47,60	80,30	198,70
Huile minérale Ragosine VII	3,13	12,31	21,67	84,50
Huile minérale Standard russe D	6,79	23,10	46,90	156,22
Huile minérale Young Paraffin pr graissage.	» »	» »	130,80	248,80
Oléine (acide oléique)	24,40	» »	83,00	184,20
Huile minérale russe Gœrger	(23°) 5,53	» »	20,73	80,00
Huile minérale Standard russe L	(18°) 2,17	» »	7,04	27,04

Par ce premier tableau et les courbes qui y sont jointes, on voit déjà les différences de marche que présentent les fluidités des différentes huiles. Les unes montent brusquement à partir d'une certaine température et coulent presque comme l'eau ; les autres, peu différentes des premières à basse température, conservent leurs qualités quand la température s'élève et ne s'éloignent que lentement et progressivement de l'axe des X. On voit en outre qu'il ne serait pas bon, pour différencier les huiles au point de vue analytique, de les essayer à trop basse température ; en s'élevant, les différences seront plus notables.

Le tableau II contient les fluidités de trois huiles prises avec notre appareil muni de sa tige intérieure et sans sa tige. Dans ces essais, la température fixe a été obtenue à l'aide d'un courant d'eau, dispositif plus simple que le courant de vapeur, qui nous a donné aussi très peu de variations de température.

(*Voir* Tableau II *au verso.*)

TABLEAU II.

NATURE DES HUILES	QUANTITÉS EN GRAMMES ÉCOULÉES A L'HEURE													
	15°		25°		35°		45°		55°		65°		75°	
	Avec tige	Sans tige	Avec tige	Sans tige	Avec tige	Sans tige	Avec tige	Sans tige	Avec tige	Sans tige	Avec tige	Sans tige	Avec tige	Sans tige
	17°	19°												
Huile de colza soutirée............	14,60	175,68	17,74	226,68	26,22	335	37,50	478	50,85	658	66,21	»	81,00	»
	16°5	17°8												
Huile de résine rectifiée...........	8,29	112,44	17,10	204,20	34,40	431	61,50	732	98,14	1191	145,24	»	200,00	»
(Densité 0,966 à 15°.)	17,8	18,5												
Huile minérale russe.........	4,42	53,36	6,92	86,64	13,17	167,70	22,29	276	56,42	435	54,74	»	»	»
(Densité 0,909 à 15°.)														

Remarque. — L'huile minérale russe appartient à un type voisin de l'huile Ragosine VII.

On voit par ce tableau II que les quantités d'huile écoulées croissent avec une extrême rapidité lorsque la tige de l'appareil a été enlevée. La courbe est alors voisine d'une ligne droite et peu différente pour des huiles diverses; ce qui montre encore l'utilité de la tige intérieure pour connaître les qualités lubréfiantes d'une huile et la caractériser au point de vue analytique. Car, pour obtenir ces deux résultats, il est nécessaire que l'accroissement de fluidité ne soit pas hors de toute proportion avec l'accroissement de température et que les quantités d'huile écoulées soient bien définies et dans des rapports très différents pour chaque huile.

Fluidité des mélanges.

Il était à prévoir que la fluidité d'un mélange d'huiles serait égale à la moyenne proportionnelle des fluidités des huiles entrant dans la composition de ce mélange. Cette loi s'est vérifiée dans nos essais. Nous n'avons pas trouvé des chiffres s'écartant de plus de 0,02 à 0,025 au maximum de ceux donnés par le calcul. Ce qui prouve de plus que les chiffres fournis par l'appareil sont les mêmes pour plusieurs opérations faites dans des conditions bien différentes.

Nous avons fait un certain nombre d'essais sur les mélanges suivants composés avec des huiles étudiées dans le tableau I.

TABLEAU III.

MATIÈRE ET COMPOSITION DES MÉLANGES		QUANTITÉS EN GRAMMES D'HUILE ÉCOULÉE A L'HEURE							
		à 15°		à 35°		à 46°		à 78°	
		Trouvé	Calculé	Trouvé	Calculé	Trouvé	Calculé	Trouvé	Calculé
N° 1	Huile de colza soutirée.. 50. Huile de résine rectifiée. 35. Huile minérale Boniface. 15.	»	11,19	»	33,91	61,50	61,68	»	166,49
N° 2	Huile de colza soutirée.. 35. Huile de résine rectifiée. 45. Huile minérale Boniface. 20.	11,60	11,30	»	36,50	68,00	67,70	176,00	178,00
N° 3 d'hiver	Huile de colza soutirée.. 20. Huile Standard russe D.. 35. Huile de résine rectifiée. 45.	8,90	8,47	»	30,85	62,00	61,65	184,00	189,89
N° 4	Huile de colza soutirée.. 90. Huile minérale Boniface. 10.	»	11,67	»	27,62	»	45,56	»	102,49

La loi des fluidités des mélanges des liquides a une grande importance au point de vue du graissage, car, non seulement elle permet, étant connues les fluidités de diverses huiles, de composer des mélanges ayant des qualités lubréfiantes plus ou moins bonnes, eu égard à leur prix, mais elle fournit encore le moyen de se rendre compte *a priori* des pertes plus ou moins grandes que les mélanges donneront par le coulage en diverses saisons (la fermeture des boîtes à graisse n'étant jamais parfaite).

Ainsi, les chiffres et les courbes trouvés pour les mélanges 1 et 2 du tableau III montrent que les fluidités de ces huiles à 35° et même au delà sont très voisines, et pourtant le mélange 1, plus cher que le mélange 2, avait été autrefois employé par la Compagnie des chemins de fer du Midi dans le but de donner en été un liquide lubréfiant moins fluide et par suite occasionnant moins de pertes par coulage que le mélange 2 employé en hiver. On voit que ce but n'avait pas du tout été atteint.

Application des fluidités à l'analyse des huiles.

Pour la différenciation des huiles, nous avons opéré le plus souvent à la température de 35° qu'on peut avoir facilement constante. Cela permet d'agir sur des quantités de liquide assez fortes pour obtenir des écarts de chiffres relativement considérables, et on peut voir par les tableaux de courbes précédents que c'est à peu près à partir de cette température que les courbes s'écartent et deviennent bien distinctes les unes des autres. De plus, si on examine des huiles à graisser, on a l'avantage d'opérer dans les conditions qui se rapprochent le plus possible de celles de la pratique. Dans ce tableau IV, nous avons joint un certain nombre de chiffres obtenus à côté de ceux de la fluidité, afin de montrer les différences de fluidité à côté des différences des autres propriétés caractéristiques, et en même temps pour définir autant que possible les huiles sur lesquelles nous avons opéré.

TABLEAU IV.

DÉSIGNATION DES HUILES	Fluidité à 35°	Densité à 15°	Goudron 0/0	Point d'inflammation
1° Huile de colza soutirée	26,22	9,9156	»	»
2° Huile de colza soutirée	24,75	0,915	»	»
3° Huile de colza soutirée	25,40	0,915	»	»
4° Huile de colza épurée	26,20	0,915	»	»
5° Huile de colza épurée	26,36	0,915	»	»
6° Huile minérale noire russe..........	13,98	0,9092	24,17	Vers 150°
7° Huile minérale noire russe..........	17,60	0,905	21,80	Vers 150°
8° Huile minérale noire russe	13,66	0,912	23,10	Vers 150°
9° Huile minérale noire B..............	19,05	0,947	22,50	Vers 152°
10° Huile minérale noire russe..........	16,80	0,905	24,00	145°-150°
11° Huile minérale noire russe..........	10,29	0,910	26,00	»
12° Huile minérale claire d'Écosse	168,[illegible]2	0,8689	»	145°-150°
13° Huile minérale claire d'Écosse.......	163,60	0,866	10,00	Vers 155°
14° Huile minérale claire d'Écosse.......	160,33	0,866	11,50	Vers 150°
15° Huile minérale claire d'Écosse.......	169,92	0,865	12,00	Vers 1 5°

TABLEAU V.

DÉSIGNATION DES HUILES	Fluidité à 46°	Densité à 15°
1° Huile de colza soutirée	28,00	0,915
2° Huile minérale Standard D..........	33,50	0,940
3° Huile minérale Ragosine VII	17,10	0,911
4° Huile minérale B...................	61,50	0,910
5° Huile minérale d'Écosse	99,12	0,890
6° Huile de résine rectifiée	57,10	0,972

Dans ces deux tableaux IV et V, nous trouvons des huiles qui, à ne considérer que leur densité et leur point d'inflammation, paraîtraient peu différentes et qui pourtant ne sont pas de même qualité; or l'écart des fluidités vient nous renseigner à cet égard.

De tous ces résultats, il nous semble ressortir que la fluidité est une propriété complètement différente de la densité et pouvant fournir d'utiles indications sur la constitution des huiles. Par elle on obtiendrait, pour les différencier, un nouvel élément qui viendrait s'adjoindre à la densité dont les données sont si utiles et

si exactes pour les huiles végétales, mais souvent bien insuffisantes pour les hydrocarbures d'origine minérale.

On pourra aussi immédiatement se renseigner sur les qualités d'une huile de graissage ou d'un mélange de ces huiles. Nous avons vu que l'huile de colza soutirée, qui est généralement reconnue comme donnant le meilleur graissage, a une courbe s'éloignant peu de l'axe des températures. Pour l'huile de résine, au contraire, la fluidité s'accroît très vite avec la température et, par suite, le graissage est inférieur. C'est dire qu'en cas de chauffage d'un organe mécanique, cette huile, employée seule, n'aurait presque plus d'action. Suivant que la courbe de fluidité d'une huile se rapprochera de l'huile de colza ou de l'huile de résine, on pourra prévoir si elle fournit un lubréfiant plus ou moins bon.

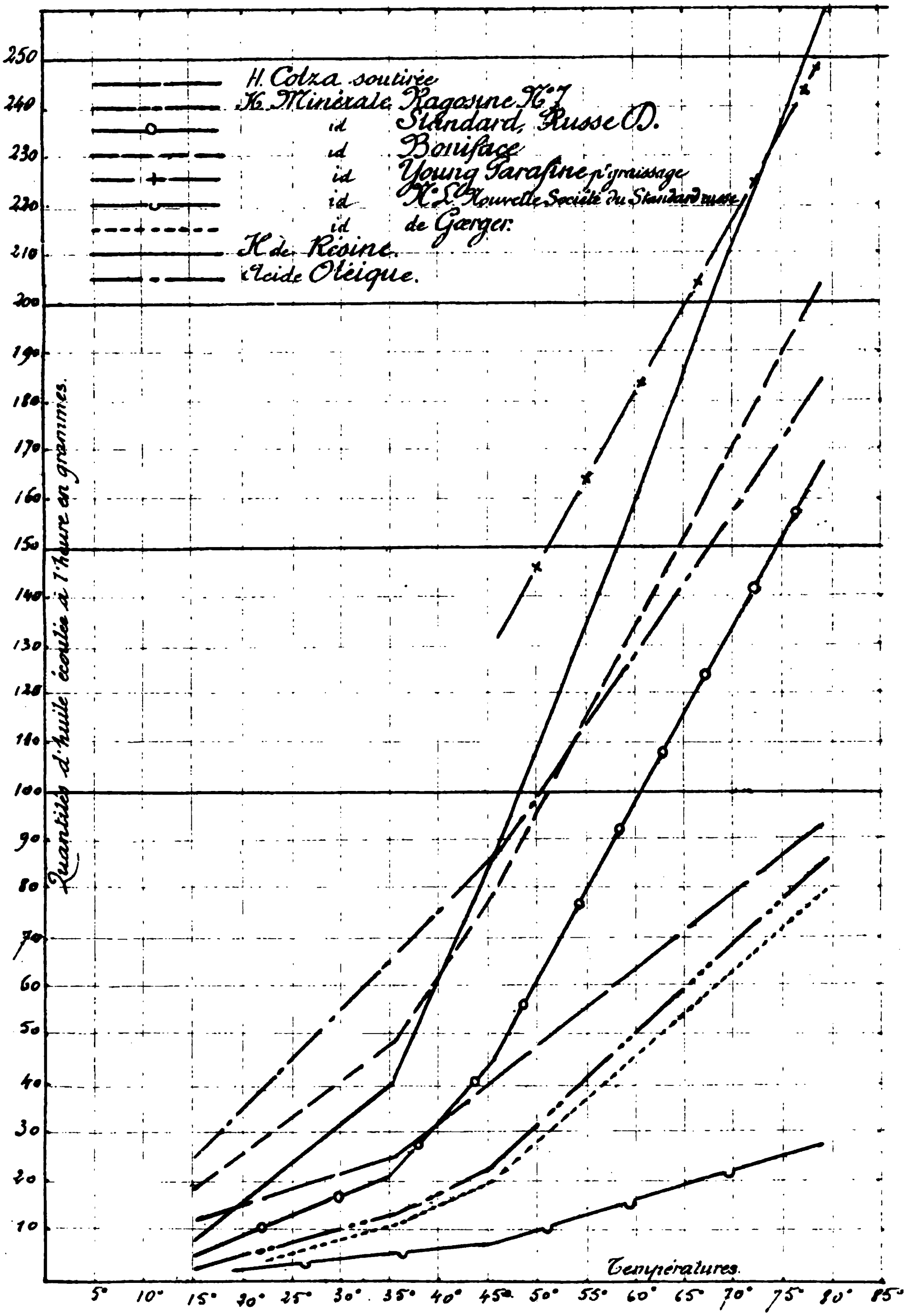
Nous ajoutons ci-dessous un tableau VI contenant les données supplémentaires des huiles que nous avons indiquées dans le tableau I, afin de spécifier d'une façon aussi précise que possible les échantillons sur lesquels nous avons opéré.

TABLEAU VI.

DÉSIGNATION DES HUILES	Densité à 15°	Goudron p. 0/0	Point d'inflammation
Huile minérale Boniface	0,910	13,20	Vers 200°
Huile minérale Standard russe D	0,940	26,60	120°-125°
Huile minérale Ragosine VII	0,911	22,20	Vers 135°
Huile minér^{le} Young-Paraffin p^r graisser.	0,890	12,30	Vers 160°
Huile minérale Standard russe L	0,953	36,83	110°-115°
Huile minérale russe Gœrger	0,910	21,60	Vers 160°

Tableau 1

Courbes des variations de fluidité de quelques Huiles



Courbes du Tableau II

avec l'appareil muni de sa tige intérieure

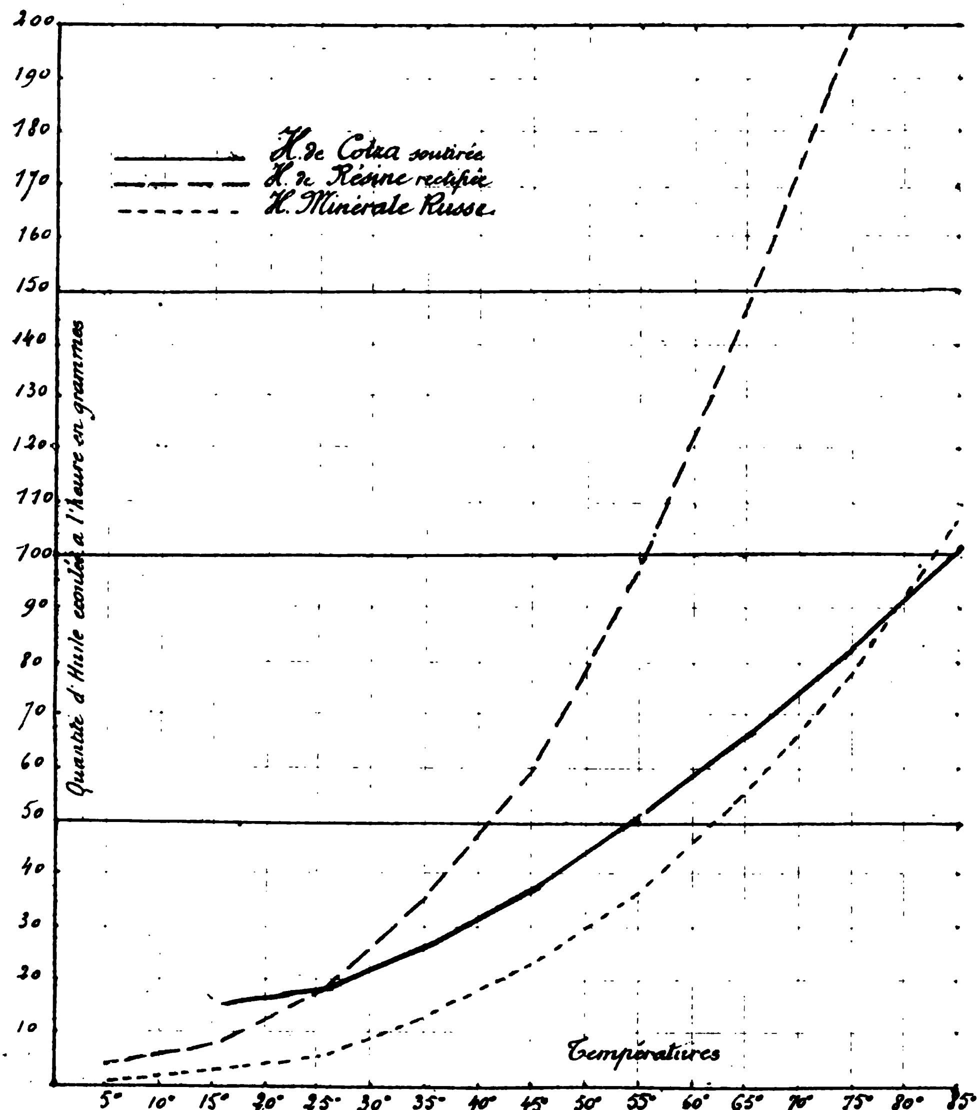


Tableau III

Courbes des variations de fluidité de divers mélanges d'huiles employés à la Compagnie

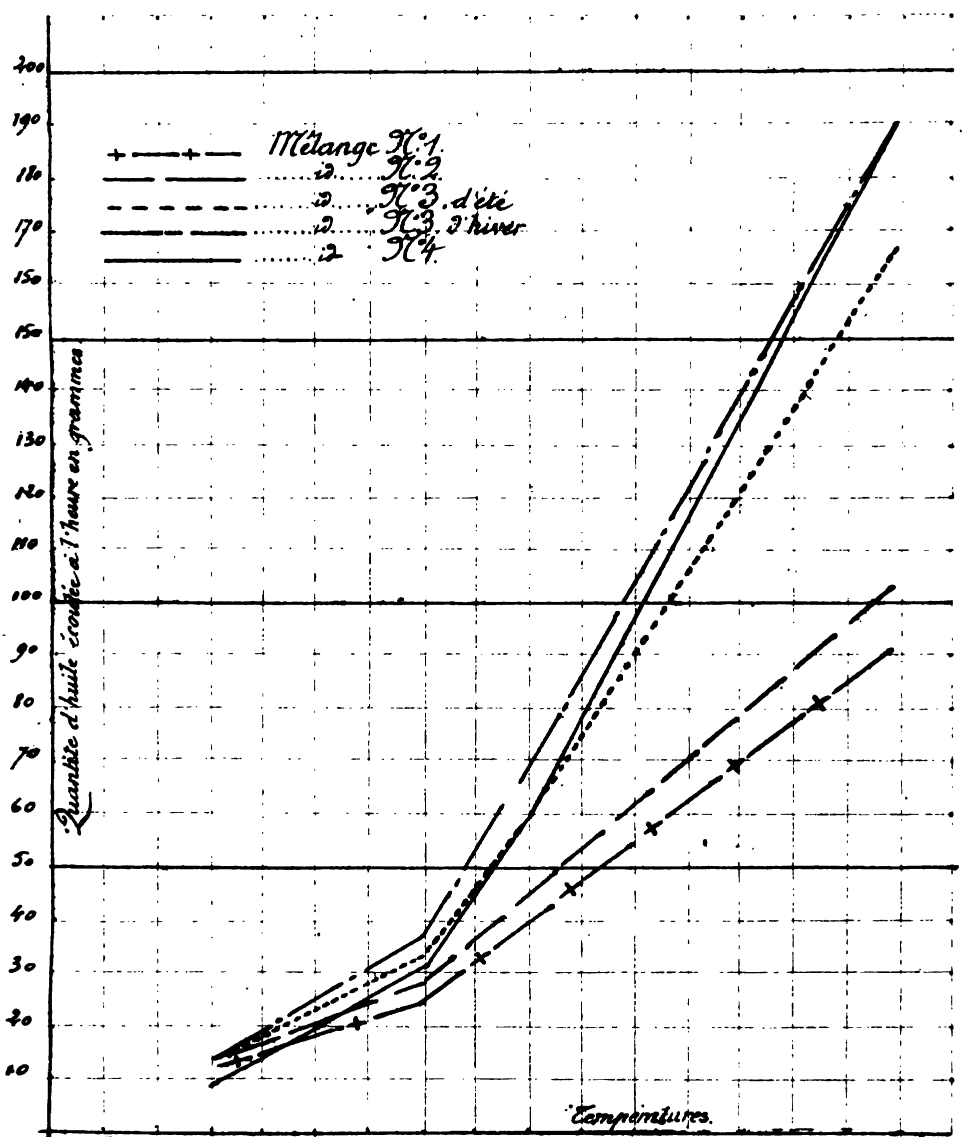


TABLE DES MATIÈRES

Bordeaux. — Imp. G. GOUNOUILHOU, rue Guiraude, 11.